N° d'ordre 392

Année 1970

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Jean FABRE

Ingénieur ENSEEHT

Contribution à l'étude de l'intéraction des jets plans turbulents - Application à l'amplification fluide proportionnelle

Soutenue le 25 Avril 1970 devant la Commission d'Examen

MM.	ESCANDE	Président
	NOUGARO DAT SANANES PIQUEMAL	Examinateurs

N° d'ordre 392 Année 1970

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Jean FABRE

Ingénieur ENSEEHT

Contribution à l'étude de l'intéraction des jets plans turbulents - Application à l'amplification fluide proportionnelle

Soutenue le 25 Avril 1970 devant la Commission d'Examen

MM. ESCANDE — Président

NOUGARO
DAT
SANANES
PIQUEMAL
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE TOULOUSE

FACULTE DES SCIENCES

PERSONNEL

Administration

M. MATHIS ..... Président du Conseil Transitoire de Gestion
M. AGID ..... Assesseur
M. LELUBRE ..... Assesseur

Honorariat

M. CAPDECOMME..... Doyen honoraire, Recteur honoraire
M. DELTHEIL ..... Recteur honoraire, Doyen honoraire, Professeur honoraire
M. DUPOUY ..... Doyen honoraire, Membre de l'Institut Directeur général honoraire du CNRS
M. DURAND ..... Doyen honoraire
M. FOUCHE ..... Professeur honoraire
M. CAUSSENS ..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES ..... Professeur honoraire
M. MIGNONAC ..... Professeur honoraire
M. MORQUER ..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. VANDEL ..... Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. TEISSIE-SOLIER ..... Professeur honoraire

Professeurs

M. ESCANDE ..... Mécanique des Fluides, Membre de l'Institut
M. DUPOUY ..... Physique, Membre de l'Institut

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543906_0032

M. CASTERAS .....Géologie, Correspondant de l'Institut
M. DEDOS .....Chimie
M. CAPDECOMME .....Minéralogie
M. DUPIN .....Radioélectricité
M. NOUVEL .....Biologie Générale
M. GALLAIS .....Chimie, Correspondant de l'Institut
M. DURAND .....Physique
M. FERT ..... Physique
M. DIEHL ..... Agronomie
M. LESBRE ..... Chimie Organique
M. BRUNEL ..... Physiologie Végétale
M. HURON ..... Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS ..... Pédologie
M. TRICHE ..... Chimie Analytique et spectrographique
M. LEDOUX ..... Zoologie appliquée
M. RIVALS ..... Agriculture
M. PERRIER ..... Physique
M. MATHIS ..... Chimie
M. ORLIAC ..... Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE ..... Physique
M. ANGELIER ..... Zoologie
Mlle de FERRE ..... Botanique
M. FARRAN ..... Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET ..... Physique Théorique et Calcul numérique
M. SARFATY ..... Biologie animale
M. NOUGARO ..... Hydraulique générale et appliquée
M. LAGASSE ..... Electrotechnique
M. GARDY ..... Génie chimique
M. BLANC ..... Physique Nucléaire
M. BIREBENT ..... Electronique Appliquée
M. VOIGT ..... Chimie Minérale
M. LEREDDE ..... Botanique

M. LELUBRE ..... Géologie
M. TROCHAIN ..... Botanique
M. MASDUPUY ..... Chimie
M. LALAGUE ..... Mathématique générale
M. DESSENS ..... Physique du Globe, Correspondant de l'Institut
M. BOUIGUE ..... Astronomie
M. COUCHET ..... Physique
M. LEJEUNE ..... Chimie
M. LASCOMBES ..... Botanique
M. ASSELINEAU ..... Chimie Biologique
M. MAURET ..... Chimie Systématique
M. AGID ..... Physiologie
M. MONTANT ..... Cryptogamie
M. GAUTIER ..... Physique
M. CRUMEYROLLE ..... Mathématiques
M. GOURINARD ..... Géologie
M. PULOU ..... Minéralogie
M. CAMBOU ..... Physique Spatiale
M. MIQUEL ..... Chimie
M. LACOSTE ..... Electrotechnique
M. THIBAULT ..... Mécanique rationnelle et appliquée
M. MONTEL ..... Chimie Physique et Electrochimie
M. MASCART ..... Mathématiques
M. MEDIONI ..... Psychophysiologie
M. THIRRIOT ..... Hydrodynamique E.N.S.E.E.I.H.T.
M. BRENON ..... Géologie
M. LAFON ..... Calcul Différentiel et Intégral
M. RAYNAUD P..... Physiologie Animale
M. ZALTA ..... Chimie Biologique
M. SEVELY ..... Electrotechnique
M. POMMIEZ ..... Mathématiques
M. REY ..... Biologie Végétale
M. COULOMB ..... Physique

Professeurs associés

M. MANSOUR
M. RICHER

Professeurs sans chaire

M. HAMANT ..... Botanique
Mme BRUNEL ..... Physiologie Végétale
Mlle BERDUCOU ..... Physiologie Végétale
M. MARONI ..... Chimie
M. SECONDAT ..... Zootechnie et Hydrobiologie appliquée
M. PICCA ..... Physique
M. MERIC ..... Mathématiques Appliquées
M. BEETSCHEN ..... Biologie Générale
Mme LECAL ..... Zoologie
M. BUGAREL ..... Génie Chimique
M. MIROUSE ..... Géologie
M. PILOD ..... Physique
M. LARROQUE ..... Physique
M. BARRANS ..... Chimie
M. TRINQUIER ..... Physique
M. GRUAT ..... Mécanique des Fluides (Hydraulique)
Mme LAFON ..... Mathématiques
Mlle LAPEYRE ..... Mathématiques (Informatique)
M. DAT ..... Mécanique des Fluides
M. JEANNIN ..... Chimie Minérale
M. BERTRAND ..... Chimie
M. SATGE ..... Chimie organique
M. DESQ ..... Mathématiques
M. MAHENC ..... Chimie
M. LATTES ..... Chimie

M. ROCARD ..... Electronique
M. DEGEILH ..... Physique
M. FALLOT ..... Biologie Végétale (viticulture et arboriculture)
M. POILBLANC ..... Chimie
M. TOULE ..... Physiologie Végétale
M. FRASNAY ..... Mathématiques
M. CASSAGNAU ..... Zoologie
M. GUERIN ..... Mathématiques

Maîtres de Conférences

M. BLANCHARD..... Mathématiques
M. COULON ..... Physique Industrielle
M. HOFFMANN ..... Electronique
M. BITSCH ..... Zoologie
M. FONTAN ..... Physique Nucléaire
M. PESCIA ..... Physique
M. SICARD ..... Biologie Génétique
M. CAUSSINUS ..... Mathématiques Appliquées
M. DE LOTH ..... Chimie Physique
M. MARTY ..... Physique Industrielle
M. BAUDRAS ..... Chimie Biologique
M. DURAND Ph..... Physique
M. LEFEUVRE ..... Electronique ENSEEIHT
M. SOUQUET ..... Géologie
M. SAPORTE ..... Physique
M. ATTEIA ..... Mathématiques
M. ENJALBERT ..... Chimie
M. IMBERT ..... Psychophysiologie
M. SCHNEIDER ..... Biologie Cellulaire
M. ANGELINO .....Génie Chimique

M. DABOSI ..... E.N.S.C.
M. ETTINGER ..... Mathématiques
M. CALVET ..... Mécanique des Fluides (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. PAGANI ..... Physique

Maîtres de Conférences Associés

M. PUN
M. JEAN

Chargés d'Enseignement

M. BEAUFILS ..... Informatique
M. CASTAGNETTO L..... Mathématiques (E.N.S.EE.I.H.T.)
M. DARROZES ..... Mécanique
M. OLIVIER ..... Mathématiques

Personnel de la Faculté affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de TOULOUSE

Professeurs sans chaire

M. CASSIGNOL ..... Génie Electrique
M. COLLETTE ..... Physique

Maîtres de Conférences

M. FAGET ..... Physique
M. TRUCHASSON ..... Mécanique
M. SCHUTTLER ..... Physique
M. ROQUES .....Chimie
M. DRILLAT .....Chimie
M. MIRA .....Génie Electrique
M. GRATELOUP .....Génie Electrique

M. LETURCQ ..... Génie Electrique
M. SIRIEYS ..... Génie Civil
M. MASO ..... Génie Civil
M. DURAND Gilbert ..... Chimie
M. CARRARA ..... Physique
M. CUPPENS ..... Mathématiques

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de TOULOUSE

Maîtres de Conférences

M. MARTIN..... Génie Electrique
M. THENOZ ..... Minéralogie
M. PERENNOU ..... Informatique

Chargé d'Enseignement

M. REY ..... Génie Electrique

Secrétariat

M. PRINEAU ..... Conseiller Administratif des Services Universitaires

Je dédie ce mémoire à ma femme, à mes enfants Serge et Pascale, avec tout mon amour,

à mes parents et à mes frères, en témoignage de reconnaissance et d'affection.

AVANT-PROPOS

- : -

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes Maîtres qui, par leur enseignement à l'ENSEEHT, ont préparé le travail que j'ai réalisé.

Et je veux tout d'abord dire ma reconnaissance à Monsieur le Professeur ESCANDE, Membre de l'Institut, qui a bien voulu m'accueillir au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides. J'ai particulièrement apprécié l'honneur qu'il me fait de présider le Jury.

Je remercie profondément Monsieur le Professeur NOUGARO de la bienveillante sollicitude dont il a toujours fait preuve à mon égard et d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

J'ai été très sensible à la confiance et aux marques d'amitié que le Professeur DAT m'a toujours témoignées. Je remercie en lui le guide qu'il a été dans mes travaux et le précurseur qui a su m'entraîner dans une voie nouvelle.

Je remercie également Messieurs SANANES, Directeur de Recherche au CNRS et FIQUEMAL, Maître de Recherche au CNRS d'avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury.

Je tiens à souligner le parfait climat qui a toujours régné au sein du groupe de Fluidique et j'ai particulièrement apprécié la qualité du travail de Messieurs FOHANNO et CLARIA tout au long des essais et dans

la réalisation du présent ouvrage. A eux et aux personnes du groupe j'exprime toute ma reconnaissance.

Je ne saurais oublier l'aide efficace que Monsieur LAVILLE m'a apportée pour résoudre les problèmes de mesure, la patience dont Messieurs DOURNES et BACON ont fait preuve pour m'initier au calcul numérique et le travail minutieux de Monsieur LEGER dans la réalisation des maquettes. Qu'ils soient ici remerciés.

Je profite de l'occasion qui m'est offerte d'exprimer à Monsieur CASTEX, Directeur du Laboratoire de Banlève, toute ma reconnaissance pour l'amabilité avec laquelle il a résolu tous mes problèmes techniques ; à travers lui, je remercie tout le personnel du Laboratoire pour les marques de sympathie et d'amitié dont j'ai été l'objet, et particulièrement Madame CAUGNE pour la réalisation du présent ouvrage et Madame BOUDIGUE pour sa mise en page.

SOMMAIRE

- : -

INTRODUCTION 5

Essais préliminaires 11

a. Récupération en pression 12

b. Variation du gain avec l'éloignement 12

c. Variation du gain avec le nombre de Reynolds 13

PREMIERE PARTIE

ETUDE DES JETS PLANS TURBULENTS ET DE LEUR INTERACTION

CHAPITRE I - ETUDE THEORIQUE DES JETS PLANS TURBULENTS

I. 1. Equations générales des écoulements turbulents 17

I. 2. Hypothèses générales sur la turbulence libre 19

I. 3. Hypothèses générales sur les jets turbulents 21

I. 3. 1. Description du phénomène 21

I. 3. 2. Hypothèses communes aux problèmes de turbulence libre 22

I. 3. 3. Hypothèses et solutions pour la région établie 24

I. 3. 4. Comparaison des solutions de la région III 29

I. 3. 5. Hypothèses et solution pour la région I 30

I. 3. 6. Comparaison des solutions de la région I 34

I. 3. 7. Conclusions générales sur les solutions proposées 35

I. 4. Solution unique proposée 35

I. 4. 1. Utilisation de la solution de Reichardt 39
I. 4. 2. Utilisation de la solution de Goertler 40
I. 4. 3. Discussion sur les solutions proposées 41
I. 4. 4. Effet de la couche limite à la sortie de la buse 42
I. 4. 5. Généralisation de la solution proposée 45

CHAPITRE II - ETUDE THEORIQUE DE L'INTERACTION DE JETS

II. 1. Ecoulement du jet sur la plaque 48

II. 1. 1. Première transformation 49
II. 1. 2. Deuxième transformation 50
II. 1. 3. Calcul de $\omega(\zeta)$ 51
II. 1. 4. Expression de $z(f)$ 53
II. 1. 5. Expression des coordonnées de J 53

II. 2. Calcul pratique de Q 55
II. 3. Calcul de α_J 55

II. 3. 1. Intégrale sur le rayon vecteur 57
II. 3. 2. Intégrale sur l'axe réel 58
II. 3. 3. Intégrale au voisinage de la singularité 59
II. 3. 4. Calcul de z_J 61

II. 4. Détermination de α 63

II. 4. 1. Expression de α en l'absence de parois 63
II. 4. 2. Expression de α en tenant compte des parois 64

CHAPITRE III - ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INTERACTION DE DEUX JETS 71

III. 1. Mesure des déplacements 72

III. 2. Mesure des paramètres d'alimentation et de commande 73

III. 3. Mesure des pressions dynamiques 76

III. 4. Mesure des vitesses 77

III. 5. Source d'erreur dans la mesure de u 78

III. 5. 1. Sonde à fil chaud 78

III. 5. 2. Sonde de pression dynamique 79

III. 6. Etude du jet et des paramètres de l'écoulement 80

III. 6. 1. Etude du profil $u(x,y)/U(x)$ 81

III. 6. 2. Etude du profil $U(x)/U_s$ 83

III. 6. 3. Etude de la largeur de mélange 85

III. 6. 4. Bilan de quantité de mouvement 86

III. 6. 5. Discussion sur les valeurs des paramètres 88

III. 6. 6. Première solution proposée 90

III. 6. 7. Comparaison avec la solution théorique proposée 93

III. 6. 8. Conclusions sur l'étude du jet libre 96

III. 7. Etude expérimentale de l'intéraction 96

III. 7. 1. Remarques générales 97

III. 7. 2. Comportement de l'axe du jet 99

III. 7. 3. Influence de la pression statique 100

III. 7. 4. Détermination des forces agissant sur le jet 101

III. 7. 5. Comparaison avec les résultats théoriques 103

III. 8. Conclusion 107

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION AUX AMPLIFICATEURS FLUIDES PROPORTIONNELS 111

CHAPITRE IV - ETUDE DE LA BUSE D'ALIMENTATION 117

IV. 1. Influence de la couche limite sur l'écoulement 117

IV. 1. 1. Remarques préliminaires 118

IV. 1. 2. Critères de choix d'une géométrie 119

IV. 2. Influence du raccordement 121

IV. 3. Influence du nombre de Mach 123

IV. 4. Conclusion sur le choix des buses 125

IV. 5. Remarques sur les commandes 125

IV. 6. Remarques sur les récepteurs 127

CHAPITRE V - ETUDE DES AMPLIFICATEURS PROPORTIONNELS 133

V. 1. Calcul du gain en pression 133

V. 2. Amplificateur en cascade 138

V. 3. Calcul du gain en débit 142

V. 4. Essais d'amplificateurs proportionnels 143

V. 5. Amplificateurs à saturation 144

V. 6. Conclusion 145

ANNEXE :

Détermination du profil des vitesses d'un jet turbulent issu d'un ajutage de forme quelconque. 147

CONCLUSION 155

NOTATIONS

-:-:-:-

Indices :

i : conditions d'arrêt ou de réservoir

s : conditions relatives à l'alimentation

c : conditions relatives aux entrées (ou commandes)

r : conditions relatives aux chambres des récepteurs

r' : conditions relatives aux sorties des récepteurs

a : conditions atmosphériques

Coordonnées (fig. 3)

x : selon l'axe de la buse d'alimentation (origine en O à la sortie de la buse)

s : selon l'axe de la buse d'alimentation (origine au pôle du jet)

X : parallèle à l'axe des x (origine en O'sur la paroi de la buse)

y : selon l'axe perpendiculaire à celui de la buse d'alimentation (origine en O)

Y : selon le même axe que l'ordonnée y (origine en O')

z : selon l'axe perpendiculaire en O au plan de l'élément.

Notations particulières :

V :	module de la vitesse
u :	projection de la vitesse sur Ox
v :	projection de la vitesse sur Oy
w :	projection de la vitesse sur Oz
u' :	fluctuation de u
v' :	fluctuation de v
w' :	fluctuation de w
η, φ, ξ :	variables adimentionnelles
Ψ :	fonction courant
b :	largeur de mélange ou largeur du jet
A :	section des canaux
H :	épaisseur ou hauteur des canaux
L :	largeur des canaux
D :	abscisse des pointes des récepteurs ou "éloignement"
J :	quantité de mouvement
Q :	débit
P :	pression relative
p :	pression absolue
ρ :	masse volumique
μ :	viscosité dynamique
ν :	viscosité cinématique

Grandeurs adimensionnelles

$\frac{H}{L_s}$ sera noté **h** (rapport de forme)

$\frac{L_r}{L_s}$ sera noté l_r

$\frac{D}{L_s}$ sera noté d

M : nombre de Mach

R_e : nombre de Reynolds

INTRODUCTION

- : -

Il y a quelques années, lorsque des chercheurs trouvèrent le parti que l'on pouvait tirer du phénomène de recollement d'un jet sur une paroi dans les applications aux problèmes de logique , ils venaient de définir la Fluidique. Ils ne se doutaient pas alors, qu'après des résultats rapides, ils se heurteraient à une certaine méfiance chez l'utilisateur. A cette réaction, on peut donner plusieurs raisons.

D'une manière générale, le profane a une préférence marquée pour ce qui est le plus hermétique. Et au premier abord la Fluidique paraît trop simple. A cause justement de cette simplicité il ne semble pas que ses solutions aient recueilli une confiance totale.

Il y a d'autres raisons plus techniques : la Fluidique a grandi trop vite et elle porte en elle ses défauts de jeunesse ; rapidement en effet, des résultats encourageants ont vu le jour, mais on s'est aperçu par la suite que pour perfectionner les éléments, le travail était considérable et les modèles mathématiques difficiles, voire impossible à mettre en oeuvre.

A l'heure actuelle quel est le bilan ? Sans crainte de paraître trop optimiste, nous pouvons dire qu'il est positif en dépit du passif. On a trop vanté les qualités et les mérites de la Fluidique pour que nous fassions son panégyrique. Cependant, on peut dire qu'au point de vue taille et performances, on est arrivé à des résultats satisfaisants. Par contre, ces mêmes éléments ont des défauts souvent graves : on peut citer le bruit de fonctionnement généralement trop important, la difficulté à connecter deux

éléments sans changer le fonctionnement, ceci étant vrai pour les circuits logiques principalement, la reproductibilité des performances.

Mais le défaut principal est d'avoir souvent trop présumé des performances et d'avoir voulu faire systèmatiquement de la Fluidique une concurrente de l'Electronique dans tous les domaines. En étant réaliste, il semble que l'on pourra dégager des applications spécifiques, où l'on saura utiliser les excellentes qualités de ces éléments et le progrés qu'ils représentent par rapport à la pneumatique traditionnelle.

Dans son développement la Fluidique s'est créé un domaine connexe avec l'automatique et la Mécanique des Fluides, qui est pour elle ce que la Physique du solide est au transistor.

Il appartient donc au mécanicien des fluides de travailler sur les problèmes fondamentaux de manière à optimiser les qualités et les performances des composants et des circuits. C'est la raison pour laquelle nous avons abordé le problème qui nous était proposé dans cette optique. Et lorsqu'il nous a été demandé de travailler sur les amplificateurs proportionnels à déviation de jets, nous avons pensé que la meilleure façon d'aborder le problème était de traiter de l'intéraction de jets.

Une fois cette mise au point faite, nous nous proposons de placer dans son cadre l'amplification fluide proportionnelle.

Si la Fluidique a pris corps et s'est développée par ses applications logiques et ses éléments binaires, des composants analogiques ont vu le jour rapidement. Le régulateur Askania, bien que comportant une partie mobile, peut être considéré comme un précurseur dans ce domaine : il contient quelques éléments essentiels des composants actuels : buse d'alimentation, récepteurs. Parmi les solutions retenues à l'heure actuelle on peut faire un classement suivant le mode de fonctionnement des amplificateurs proportionnels :

- amplificateurs à intéraction de jets (figure 1, a)
- amplificateurs à impact (figure 1, b)
- amplificateurs à tourbillon (figure 2, a)
- amplificateurs à intéraction de jets et effet de paroi (figure 2, b).

Ces éléments à impact sont aussi à intéraction de jets, mais nous les classons à part à cause de leur mode de fonctionnement particulier.

Cette liste n'est pas limitative, mais nous avons recensé uniquement les éléments classiques, encore que l'amplificateur à effet de paroi soit peu répandu. Ceux qui sont les plus utilisés sont les éléments à déviation de jets. Nous nous sommes délibérément orientés vers ceux-ci parce qu'il semble que, compte tenu des performances que l'on peut espérer et des difficultés de fabrication des éléments à effet de paroi, ils représentent une solution intermédiaire.

Des essais préliminaires nous ont permis dans un premier temps de mettre en évidence les paramètres principaux de la déviation.

Nous avons abordé ensuite une étude théorique qui a été scindée en deux. Une première partie donne une solution théorique à l'aval de la zone d'intéraction, une seconde partie traite du mécanisme de la déviation dans cette même zone et nous avons défini un modèle mathématique en supposant l'écoulement irrotationnel.

Par une étude sur un modèle expérimental, nous avons déterminé les paramètres essentiels de la déviation.

A la lumière de ces résultats, on peut faire un calcul prévisionnel des performances des amplificateurs à déviation de jets.

ESSAIS PRELIMINAIRES

- : -

- Principe de fonctionnement

Le principe de fonctionnement d'un amplificateur à déviation de jets est très simple. L'idée fondamentale est l'utilisation de la déviation d'un jet à forte quantité de mouvement (jet de puissance ou d'alimentation) par un jet ou par des jets à faible quantité de mouvement (jet de commande ou de contrôle ou entrée) - (figure 3). La récupération du jet dévié se fait dans des récepteurs. Deux paramètres agiront de manière opposée pour les performances. Plus on éloigne les récepteurs, plus l'angle sous lequel on les voit de la sortie de la buse est faible, et plus le jet s'étend en largeur. Il existera donc pour l'amplificateur un certain nombre de paramètres géométriques dont il faudra fixer la valeur pour trouver un optimum des performances.

- Essais préliminaires

Pour nous permettre de nous faire une idée des difficultés de réalisation et de mise au point, nous avons abordé l'étude par la fabrication de maquettes simples (figure 4) dans lesquelles il était possible de faire varier la distance buse-récepteur, ainsi que de combiner entre eux une buse et trois récepteurs.

Les premiers essais ont porté sur la récupération en pression des récepteurs, sur la variation du gain en fonction de la distance d'éloignement et sur la variation du gain avec le nombre de Reynolds.

a. Récupération en pression

C'est le premier bilan que l'on doit faire. Quelle est la perte que l'on doit consentir avec l'éloignement des récepteurs. Les courbes de la figure 4 montrent une perte de 35 % pour un éloignement relatif de 4, 55 et de 47 % pour 5, 40. Cette mesure a été faite pour des récepteurs équilibrés, c'est-à-dire pour $\Delta P_c = 0$.

D'autre part, la récupération est constante pour un large domaine de variation de la pression d'alimentation, ce qui indique que le nombre de Reynolds n'influe pas dans une certaine gamme.

b. Variation du gain avec l'éloignement

L'examen des courbes des figures 6 et 7 faites avec deux récepteurs différents, entraîne les constatations suivantes :

- il est toujours difficile de centrer le jet, c'est-à-dire d'avoir $\Delta P_r = 0$ lorsque $\Delta P_c = 0$. Les amplificateurs qui se trouvent dans le commerce ont d'ailleurs ce même défaut. Il faut dire que seule la précision d'usinage est en cause.
- le gain varie avec l'éloignement et on constate (figures 8 et 9) que la variation est très grande avec la distance. La configuration du récepteur a elle aussi une grande influence mais on doit dire que dans les deux cas la pression de récupération était très instable : dans chaque expérience il a été impossible de fonctionner avec des impédances infinies à la sortie. Ce problème d'instabilité pose celui de la présence de l'évent central dans le cas des éléments destinés à fonctionner sorties bouchées.

c. Variation de gain avec le nombre de Reynolds

La pression d'alimentation et le nombre de Reynolds à la sortie de la buse sont liés par la relation :

$$\gamma \frac{R_e}{L_s} = \sqrt{\frac{2P_s}{P}}$$

Les relevés de la figure 10 ont été réalisés à différentes pressions d'alimentation. On a donc fait varier le nombre de Mach et le nombre de Reynolds. On constate que comme pour les essais de récupération le nombre de Mach et le nombre de Reynolds n'ont pas une grande influence dans le domaine exploré, c'est-à-dire :

$$M \quad \left[0,27 - 0,96 \right] \quad \text{et} \quad R_e \left[5\,700 - 19\,000 \right]$$

On constate la même chose figure 10 pour le deuxième récepteur.

Ces quelques résultats qui ont été prélevés parmi un grand nombre d'essais nous ont laissé supposer qu'il était préférable d'aborder le problème de manière systématique.

PREMIERE PARTIE

- : -

ETUDES DES JETS PLANS TURBULENTS ET DE LEUR INTERACTION

CHAPITRE I

- : -

ETUDE THEORIQUE DES JETS PLANS TURBULENTS

Le titre de cette partie laisse prévoir que l'étude envisagée sera axée sur les régimes turbulents. Il faut faire remarquer à ce propos que le régime d'écoulement considéré concerne la partie à l'aval de la sortie de la buse.

Le problème du jet plan laminaire a été résolu par Schlichting et Bickley et les mesures faites par Andrade (réf. 1) montrent que le nombre de Reynolds critique est de 30.

Examinons quelle vitesse limite on trouverait pour des éléments fluides fonctionnant à $R_e = 30$. Supposons que la largeur de l'ajutage soit de 1/10 de millimètre, ce qui est une dimension limite, la vitesse correspondante pour de l'air à 20°C est de 5 m/s et la pression d'alimentation relative de 1,6 mm CE. Il est impossible d'imaginer pour l'instant un élément fonctionnant à des pressions aussi basses. Pour cette raison, nous ne retiendrons pour notre étude que les régimes turbulents. On doit cependant remarquer que la présence de paroi confinant le jet dans le sens de la hauteur est un élément qui peut favoriser l'augmentation du nombre de Reynolds critique.

I.1. EQUATIONS GENERALES DES ECOULEMENTS TURBULENTS

Les équations de Navier-Stokes en écoulement bi-dimensionnel

s'écrivent :

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho\left[u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]=\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \rho\left[u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]=\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \end{cases}$$

où l'expression des efforts τ et σ est :

$$(2)\qquad \begin{cases} \sigma_x=-p+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}-\rho\overline{u'^2} \\ \sigma_y=-p+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}-\rho\overline{v'^2} \\ \tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau=\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)-\rho\overline{u'v'} \end{cases}$$

où u et v sont les vitesses moyennes, et u' v' les fluctuations.

L'équation de continuité s'écrit :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x}+\dfrac{\partial v'}{\partial y}=0 \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) donnent :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho u^2-\sigma_x\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\rho uv-\tau\right]=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\rho v^2-\sigma_y\right]+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho uv-\tau\right]=0 \end{cases}$$

On admet généralement que la contribution de la viscosité dans l'expression (2) des efforts est négligeable en regard de celle de la turbulence. On peut poser :

$$(2') \qquad \begin{cases} \nabla x = -p - \rho \overline{u'^2} \\ \nabla y = -p - \rho \overline{v'^2} \\ \tau = -\rho \overline{u'v'} \end{cases}$$

L'expression (4) devient :

$$(4') \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u^2 + \rho \overline{u'^2} + p\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho uv - \tau\right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v^2 + \rho \overline{v'^2} + p\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho uv - \tau\right] = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre les équations (4') et (3) il est nécessaire de formuler une hypothèse sur " τ " et sur " $\overline{u'^2}$ ". De ces hypothèses découlent diverses solutions.

Nous ferons une première remarque : par analogie avec la forme de l'effort tranchant en écoulement laminaire, Boussinesq a posé :

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$$

où " ε " est homologue à la viscosité cinématique " ν ", et est appelé viscosité cinématique apparente. Cependant, à l'inverse de " ν " qui est une caractéristique du fluide, " ε " dépend du champ des vitesses.

I.2. HYPOTHESES GENERALES SUR LA TURBULENCE LIBRE

Les suppositions faites sur " ε " nous intéressent car ce sont elles qui sont à la base des différentes solutions pour les jets.

I.2.1. Prandtl a introduit le premier la notion de longueur de mélange et la première théorie qu'il échaffauda le conduisit à prendre ε de la forme (réf. 1.2.6.) :

(5) $$\varepsilon = \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

où ℓ , longueur de mélange, est indépendant de y .

Il est intéressant de noter que Taylor à partir de suppositions différentes, est arrivé à un résultat analogue : (réf. 1.3.6.)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ell'^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

Ces résultats ont cependant le désavantage de supposer que ε s'annule pour tous les extrêma de u , alors que le mélange turbulent existe.

I.2.2. Pour pallier à cet inconvénient, Prandtl (réf. 1.4.6.) supposa alors que " ε " était proportionnel à la largeur de la zone de mélange "b", et à la différence entre les vitesses maximum et minimum. Cette expression de ε est d'ailleurs valable uniquement pour la turbulence libre.

(6) $$\varepsilon = c.b\,(u_{max} - u_{min})$$

où c est une constante sans dimension.

Cette hypothèse est très séduisante car elle fait intervenir des paramètres fonctions de l'abscisse seule. Dans une section transversale " ε " est donc constant, ce qui apporte une grande simplification dans les solutions de turbulence libre.

I.2.3. La troisième hypothèse à laquelle nous ferons appel est celle de Reichardt (réf. 1.5.6.). Celui-ci suppose que le transport transversal de quantité de mouvement est proportionnel au gradient latéral de la composante longitudinale de quantité de mouvement.

(7) $$\overline{uv} = -\lambda(x)\frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y}$$

Nous reprendrons par la suite ces trois hypothèses qui ont conduit à des solutions que nous examinerons. Nous avons omis de parler des hypothèses de Von Karman que nous n'utiliserons pas.

I. 3. HYPOTHESES GENERALES SUR LES JETS TURBULENTS

I. 3. 1. Description du phénomène

Dans les écoulements de jets on distingue généralement trois parties bien distinctes (fig. 12).

1) La région I , appelée zone du corps potentiel, qui a les caractéristiques suivantes : une partie du jet qui sort de l'ajutage se mélange avec le fluide ambiant par entraînement. Cette partie augmente à mesure que l'on va vers l'aval et atteint finalement toute la largeur du jet. L'abscisse pour laquelle la zone de mélange correspond à la largeur du jet est la limite de cette première région. Parallèlement la zone du corps potentiel est celle où le fluide qui sort de l'ajutage n'est pas mélangé au fluide ambiant. Elle décroît lorsque x augmente.

Dans le corps potentiel la pression totale est constante quelque soit x et y et les gradients de pression totale sont donc nuls dans les deux directions.

Dans la zone de mélange, l'entraînement est d'autant plus important que les gradients de vitesse sur Oy sont grands. D'autre part, ils diminuent à mesure que x augmente. Le relevé des pressions montre une courbe aplatie sur sa partie centrale et une largeur du jet de plus en plus

grande lorsqu'on se déplace vers l'aval. Le jet s'étend.

2) La région III : est appelée généralement région des profils établis. Si à l'aval elle s'étend jusqu'à l'infini, il est difficile de lui préciser ses limites amont. Cependant comme nous le verrons dans les résultats ultérieurs, on peut dire que dans cette région la quantité :

$$J(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 \, dy$$

reste constante.

D'autre part, on peut la définir comme la partie dans laquelle la largeur du jet est une fonction linéaire de l'abscisse. Le mélange turbulent remplit évidemment toute la section et en même temps que le jet s'étend, la vitesse axiale diminue.

3) La région II : est celle qui est la plus simple à définir lorsqu'on a déterminé les précédentes. Physiquement, le mélange y est aussi complètement établi, mais elle ne possède pas les caractéristiques de la région III.

En résumé, il semble que les régions les plus importantes soient la première et la dernière, car dans la bibliographie on trouve des solutions concernant les jets uniquement pour ces deux cas. D'autre part, ces solutions ne sont pas raccordées, on suppose seulement que pour la région III on se trouve loin à l'aval et pour la région I on est placé près de l'ajutage.

Pour résoudre le problème du jet dans ces deux parties, on considère dans un cas que la largeur de l'ajutage est faible vis à vis de la largeur de mélange turbulent (région III), et dans l'autre que l'on est en présence d'un courant semi-infini.

I.3.2. Hypothèses communes aux problèmes de turbulence libre

On suppose tout d'abord que les profils transversaux de vitesse du jet sont semblables, c'est-à-dire que l'on peut poser :

$$u(x,y) = U_{max} \cdot f(\eta) \tag{8}$$

dans lequel $f(\eta)$ est une fonction unique et η une variable adimensionnelle posée :

$$\eta = y/b(x)$$

b est une grandeur qui est soit égale, soit proportionnelle à la largeur de mélange turbulent.

U_{max} est une fonction de x. Dans la région I ce sera la vitesse à la sortie de la buse puisque l'on suppose que dans le corps potentiel la vitesse est uniforme. Dans la région III c'est la vitesse axiale.

On suppose de plus que $b(x)$ la largeur de mélange turbulent est une fonction linéaire de x. Nous verrons par la suite, et plusieurs expériences l'on montré, que ces deux hypothèses sont largement vérifiées.

On posera donc sans faire d'autres suppositions sur le paramètre :

$$\eta = y/a.x \tag{9}$$

De la connaissance de u on peut tirer l'expression de v. Soit Ψ la fonction courant, on peut poser :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

et il vient :

$$\Psi = \int u\, dy$$

Comme U est fonction de x uniquement, on peut tirer :

$$\Psi = U.a.x. \int f(\eta).d\eta \tag{10}$$

Si $F(\eta)$ est une primitive de $f(\eta)$, on trouvera :

$$\psi = U.a.x.F(\eta) + C(x)$$

On en déduit v :

$$v = -a\left[U'x\,F + U\,F - U\eta\,F'\right] + C'$$

On détermine C' par la condition :

$$v(0) = 0$$

$$v = -a\left[(U'x + U)(F - F(0)) - U\eta\,F'\right]$$

On remarque que :

$$U\,F' = u$$

On peut choisir la primitive telle que $F(0) = 0$. Il en découle que :

$$v = a\left[\eta u - (U'x + U)F\right] \tag{11}$$

I. 3. 3. Hypothèses et solutions pour la région établie

Dans ce cas précis la largeur de mélange est identique à la largeur du jet. On aura donc :

$$b(x) = a(x - x_0)$$

Le point d'abscisse x_0 est appelé pôle du jet. Il correspond à la valeur fictive $b = 0$. On peut constater que la solution est forcément limitée par cette hypothèse : la largeur de mélange ne peut jamais devenir inférieure à la largeur de la buse.

Par un changement d'origine on posera :

$$b = a.\zeta \tag{12}$$

Calculons la quantité de mouvement du jet à travers une section transversale :

$$J(x) = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(u+u')^2}\,dy = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dy + \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u'^2}\,dy$$

On néglige généralement la seconde intégrale devant la première et on assimile $J(x)$ à $\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy$. On verra par la suite si on peut considérer cette hypothèse satisfaite.

Si J ne reste pas constant, on peut poser qu'il est égal à un certain pourcentage de J_o, quantité de mouvement à la sortie de l'ajutage. On montrera par la suite qu'immédiatement après la buse cette quantité baisse et se stabilise plus en aval. On tire la relation :

$$(13) \qquad \left(U/U_s\right)^2 \cdot \frac{a.s}{L_s} = \frac{k_1}{2\int_o^\infty f^2 . d\eta}$$

D'où l'on tire que U est inversement proportionnel à $\sqrt{s}$. C'est une relation très importante car maintenant que la vitesse axiale est définie, il ne reste plus qu'à déterminer $f(\eta)$. On peut remarquer que la pression totale sur l'axe du jet est inversement proportionnelle à s

Avec la relation (13) ν devient :

$$(14) \qquad \nu = a\left[\eta u - \frac{UF}{2}\right]$$

a. Solution de Tollmien (réf. 6.7.)

A l'aide de la première hypothèse de Prandtl, Tollmien a proposé une solution pour la vitesse dans cette région.

Considérons l'équation (4'). A l'aval de l'ajutage, on peut considérer que p est nul. D'autre part, on suppose que l'on peut négliger $\rho\overline{u'^2}$ devant ρu^2. Ce qui entraîne $\nabla x = 0$.

L'équation devient, combinée avec (3) :

$$(15) \qquad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

avec $$\sigma = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$$

En introduisant la nouvelle variable η (équation 8) on trouve :

$$f'^2 + f' F + \frac{2}{a^2 s.U} \cdot \frac{d}{d\eta} (\varepsilon . f') = 0$$

ou encore :

$$(16) \qquad F'^2 + F'' . F + \frac{2}{a^2 s.U} \cdot \frac{d}{d\eta} (\varepsilon . F'') = 0$$

Dans l'équation (5) "ℓ" est indépendant de y mais on le suppose proportionnel à S :

$$\varepsilon = c^2 s^2 . \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

L'équation (16) devient :

$$F'^2 + F'' . F - 2 \frac{c^2}{a^3} \frac{d}{d\eta} \left[F''^2 \right] = 0$$

On pose a tel que :

$$\frac{2 c^2}{a^3} = 1 \qquad a = \sqrt[3]{2 c^2}$$

L'équation ci-dessus s'intègre facilement :

$$F F' - F''^2 = 0$$

C'est la résolution de cette équation qui fournit les valeurs calculées de u . Cependant la solution n'est pas analytique mais transcendante.

b. Solution de Goertler

En utilisant la seconde hypothèse de Prandtl (6), Goertler a trouvé (réf. 1.6.8.) qu'il était possible d'intégrer l'équation (16) et de donner une expression analytique particulièrement intéressante de la vitesse u .

Goertler a introduit le coefficient ∇ tel que :

$$\eta = \nabla\, y/s$$

Comme pour ε on aura :

$$\varepsilon = k\,S.u_{max} = k.S.U$$

En posant $\nabla = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, l'équation (16) devient :

$$\frac{1}{2}\left(F'^2 + F''F\right) + F''' = 0$$

Soit après deux intégrations successives, et après avoir vérifié que :

$$\eta = 0 \Longrightarrow \Psi = 0 \quad , \quad F(0) = 0 \quad , \quad F'(0) = 1$$

$$\eta \to \infty \qquad F' = 0$$

On trouve :

$$F^2 + F' = 1 \Longrightarrow F = \text{th}\,\eta$$

Les expressions de u et v deviennent :

$$u = U\left(1 - \text{th}^2\eta\right)$$

(17)

$$v = \frac{U}{\nabla}\left(\eta.\left(1 - \text{th}^2\eta\right) - \frac{\text{th}\,\eta}{2}\right)$$

Cette solution est remarquable et nous verrons qu'elle vérifie bien les résultats expérimentaux. La valeur qui a été fournie pour ∇ par comparaison avec l'expérience est de 7,67 (réf. I.9.).

c. Solution de Schlichtigg

Abramovitch (réf. 6) emploie comme solution une forme polynomiale qui constitue en fait le résultat d'un problème de sillage derrière un

corps trouvé par Schlichting (réf. 1.). La fonction réduite est :

$$f(\eta) = \left(1 - \eta^{3/2}\right)^2 \tag{18}$$

Ce qui l'a amené à introduire cette fonction, c'est la forme polynomiale extrêmement simple qu'elle a, comparée aux solutions exponentielles de Reichardt ou de Goertler et à la forme transcendante de Tollmien.

Il a été proposé une autre variante :

$$f(\eta) = 1 - \left[1 - (1-\eta)^{3/2}\right]^2 \tag{18'}$$

d. Solution de Reichardt

La solution proposée par Reichardt (réf. 1.6.5.) est intéressante car elle ne néglige pas $\rho\overline{u'^2}$ devant ρu^2

Si on ne néglige que la pression statique et si on n'explicite pas σ on aura l'équation (4') sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{(u+u')^2} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{(u+u')(v+v')} = 0$$

Avec l'équation (7) il vient :

$$\frac{\partial \overline{(u+u')^2}}{\partial x} = \Lambda(x)\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{(u+u')^2}$$

En supposant que les profils de pression dynamique sont semblables on peut résoudre l'équation ci-dessus en posant :

$$\overline{u^2} = \frac{\eta^2}{b}\cdot f(\xi) = \overline{u}_m^2 \cdot f(\xi)$$

et Λ proportionnel à x.

Reichardt trouve : $f(\xi) = e^{-\xi^2/2}$

Cette solution donne évidemment le profil des pressions dynamiques mais on pourra cependant la comparer aux autres solutions.

I. 3. 4. Comparaison des solutions de la région III

Nous avons porté figure 13 et tableau 14 les cinq solutions. La courbe de Gauss est en fait une extrapolation du profil de Reichardt ; nous avons pris à notre tour la liberté de négliger $\rho\overline{u'^2}$ et nous avons porté $e^{-\eta^2/4}$.

On peut écarter le profil de Tollmien car la solution n'est pas analytique.

Les expressions de Schlichting paraissent intéressantes mais elles ont l'inconvénient de ne pas être asymptotiques ; c'est-à-dire que pour une certaine valeur finie de la variable, le polynôme s'annule et devient négatif pour les valeurs supérieures. On est donc obligé de ne considérer le profil valable que dans un certain domaine.

Il reste deux solutions qui se ressemblent puisqu'elles font toutes deux appel à la fonction exponentielle. Nous les retiendrons toutes deux pour les comparer à l'expérience. Remarquons que ces deux solutions sont asymptotiques.

D'un point de vue calculs, la solution de Goertler est intégrable, ce qui est un avantage par rapport à la fonction de Gauss. Cependant l'intégrale de cette dernière est tabulée sous la forme :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

qui est la fonction $erf(x)$ ou fonction erreur.

. . . .

I. 3. 5. Hypothèses et solutions pour la région I

Nous avons dit que pour traiter le problème dans cette zone on supposerait que l'on se trouve en présence d'un courant semi-infini. Les solutions données pour ce problème font appel aux mêmes hypothèses de base que celles dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent.

La figure 15 montre le schéma de l'écoulement au voisinage de la buse. On peut d'ailleurs faire remarquer que le schéma ne représente pas une moitié de buse d'amplificateur proportionnel. En fait la paroi externe devrait longer l'axe OY dans sa partie négative. C'est une remarque importante et Florent fait remarquer (réf. 10) qu'il existe une différence entre un jet dit "de mur" et un jet "de buse". Il fait ressortir cette différence pour les jets à symètrie axiale. Nous essayerons de mettre en évidence la géomètrie extérieure par des expériences;

Avant d'aborder l'étude bibliographique, il faut faire remarquer que les axes de coordonnées pris en compte ne sont pas les mêmes que précédemment. On doit faire le changement,

$$X = x$$

$$Y = y + L_s/2$$

Nous prendrons pour variable adimensionnelle :

$$\varphi = Y/a \cdot x$$

$f(\varphi)$ sera l'équation de la fonction universelle telle que :

$$u = U_s \cdot f(\varphi) \qquad (19)$$

La solution de cette forme sera valable jusqu'à la limite de la région I. Cette limite pourra d'ailleurs être calculée à l'aide de la solution elle-même.

Soit φ_1 la valeur de φ pour laquelle $\frac{u}{U_s}$ est égal à 1 ou à $1-\varepsilon$.

$\frac{y}{ax} = \varphi_1$ détermine une droite qui est la limite du corps potentiel et de la zone de mélange (fig. 12).

Lorsque $y = L_s/2$ la largeur du corps potentiel est devenue nulle, l'abscisse x correspondante détermine la borne limite de la région I.

$$x_1/L_s = 1/2a.\varphi_1$$

Pour cette abscisse x_1 on peut calculer la largeur de mélange du jet correspondante. On détermine φ_2 tel que u/U_s soit égal à 0 ou à ε.

$$b_1 = L_s\left[1 - \varphi_2/\varphi_1\right]$$

a. Solution de Tollmien

Les hypothèses du paragraphe précédent sont toujours valables mais u_{max} est indépendant de x. En tenant compte de (19) l'équation (15) devient :

$$FF'' = -\frac{1}{a^2 x.U} \cdot \frac{d}{a\varphi}\left[\varepsilon.F''\right] \qquad (20)$$

En utilisant ε sous la forme :

$$\varepsilon = c^2 s^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$$

on aboutit à l'équation :

$$FF'' + 2\frac{c^2}{a^3} F''.F''' = 0$$

en faisant $a = \sqrt[3]{2c^2}$ et en éliminant la solution banale $F''=0$ on tombe sur l'équation différentielle

$$F + F''' = 0$$

L'expression de la vitesse u tirée de cette équation est :

$$u = U_s \left[0,0176\, e^{-\varphi} + 0,662\, e^{\varphi/2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi + 0,228\, e^{\varphi/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \right]$$

Cette expression est relativement complexe. Nous allons examiner la solution proposée par Goertler.

b. Solution de Goertler

L'expression de la vitesse dans cette zone découle de la deuxième hypothèse de Prandtl sur la turbulence libre.

On utilise l'équation (20) dans laquelle on prend pour ε l'expression (6).

$$\varepsilon = k . x . U_s$$

En utilisant la même variable qu'au paragraphe précédent, à savoir $\varphi = \sqrt{\frac{y}{x}}$, Goertler trouve :

$$F''' + \frac{1}{k\sqrt{2}} F F'' = 0$$

La solution de cette équation est transcendante et il utilise pour F un développement en série. La première des équations différentielles qu'il obtient donne une expression approchée :

(21) $$F' = \frac{1 + \operatorname{erf}(\zeta)}{2}$$

Nous discuterons de la validité de cette solution qui se présente déjà sous forme intégrale.

c. Solution de Schlichting

Abramovitch (réf. 6) a utilisé les expressions de Schlichting (18) et (18') de la zone établie pour la solution du problème de deux courants

parallèles semi-infinis. Sous la forme qui nous intéresse, l'équation empirique se présente ainsi :

$$(22) \qquad \frac{u}{U_s} = 1 - \left(1 - \varphi_1^{3/2}\right)^2$$

dans laquelle φ_1 est la nouvelle variable réduite :

$$\varphi_1 = \frac{y - y_2}{b} = \varphi - \frac{y_2}{b}$$

où y_2 est l'ordonnée du point sur lequel $\frac{u}{U_s} = 0$

La représentation est valable dans le domaine $\varphi_1 \left[0, 1\right]$

On voit que $\frac{u}{U_s} = 1$ pour $\frac{y_1}{b}$ tel que :

$$\frac{y_1 - y_2}{b} = 1$$

Une application des théorèmes de quantité de mouvement et de continuité donne les valeurs de $\frac{y_1}{b}$ et de $\frac{y_2}{b}$

$$y_2/b = -0,63 \quad \text{et} \quad y_1/b = 0,37$$

On définit aussi le point remarquable :

$$\frac{u(0)}{U_s} = 0,748$$

d. Solution de Reichardt

La même hypothèse qu'au paragraphe précédent a conduit Reichardt à une solution pour le problème considéré de la forme :

$$\frac{\overline{(u+u')^2}}{U_s^2} = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varphi} e^{-t^2/2}\, dt$$

que l'on peut poser :

$$(23) \qquad \frac{\overline{(u+u')^2}}{U_s^2} = 0,5\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

de manière à employer comme pour la solution de Goertler la fonction "erf".

I.3.6. Comparaison des solutions de la région I

Pour cette zone la solution la plus complexe est sans conteste celle de Tollmien. La solution polynomiale de Schlichting et Abramovitch est certes celles qui est la plus facile à manier.

Quant aux expressions de Reichardt et de Goertler, elles se ressemblent. Si l'on néglige dans l'expression (23), $\rho\overline{u'^2}$ il vient :

$$u = U_s\sqrt{0{,}5\left(1 + \mathrm{erf}\left(\varphi/\sqrt{2}\right)\right)}$$

On constate qu'il y a une parenté avec celle de Goertler (21).

Si l'on calcule les valeurs de u/U_s , lorsque $\varphi = 0$, on trouve successivement :

Reichardt : $\frac{u(0)}{U_s} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707$

Goertler : $= 0{,}5$

Schlichting : $= 0{,}75$

Tollmien : $= 0{,}68$

On remarque que seule la solution de Goertler s'éloigne des autres et les mesures faites par Reichardt (réf. 11) montrent que $u(0)/U_s$ est voisin de 0,7. En général, on tourne cette difficulté en déplaçant vers les y croissants la courbe de Goertler, de manière à la faire passer par ce point. On peut constater (fig. 16) que seule la courbe de Schlichting s'écarte notablement des autres.

I.3.7. Conclusions générales sur les solutions proposées

De cette étude préliminaire, il ressort plusieurs constatations :

- parmi les hypothèses faites, la deuxième hypothèse de Prandtl et l'hypothèse de Reichardt ont conduit à des solutions satisfaisantes et les expériences faites par Reichardt pour le jet semi-infini, et pour la région établie (réf. 11) montrent une bonne concordance entre la théorie et les résultats pratiques.

- la région II du jet est complètement ignorée et il est difficile d'extrapoler les solutions des régions I et III pour cette zone du jet. Par anticipation sur les résultats expérimentaux, nous pouvons dire que les limites sont cinq fois la largeur de la buse et douze fois la largeur de la buse. Elle est donc suffisamment importante pour que nous nous soyons efforcé de trouver une solution. D'autre part, la place des récepteurs des amplificateurs fluides proportionnels se situant généralement à l'intérieur de ces limites, la solution du problème est particulièrement importante.

I.4. SOLUTION UNIQUE PROPOSEE (réf. 12)

La première hypothèse que nous reprendrons est que les profils sont semblables lorsque $\frac{x}{L_s}$ est très grand.

$$u(x,y) = u(x,0) \cdot f(\eta) \qquad (24)$$

avec $\eta = \frac{y}{a\,x}$

Nous pourrons prendre pour $f(\eta)$ une des solutions que nous avons retenue

c'est-à-dire soit celle de Goertler, soit celle de Reichardt. Nous supposerons d'autre part que $\rho\overline{u''^2}$ est négligeable devant $\rho\overline{u}^2$.

Nous supposerons de plus que l'équation (13) est vérifiée et posons pour simplifier :

$$c = \frac{k_1}{2a\int_0^\infty f^2 \, d\eta} \tag{24'}$$

Il vient :

$$\left[\frac{u(x,0)}{U_s}\right]^2 = \frac{c.l_s}{x}$$

Avec (24) nous obtenons :

$$u^2(x,y) = U_s^2 \cdot \frac{c\,l_s}{x} \cdot f^2(\eta) \tag{25}$$

Nous savons que le coefficient c ne dépend pas de la largeur de la buse.

Considérons la figure 17. Supposons que le jet principal issu de la buse de largeur l_s est composé d'une infinité de jets très minces, de largeur $\Delta\ell$. L'axe de ces jets est situé à une distance ℓ variable, de l'axe Ox.

Ecrivons l'équation de la vitesse à l'aval d'un de ces jets :

$$u(x,y) = U_s\sqrt{\frac{c\,\Delta\ell}{x}} \cdot f(\eta_1) \tag{26}$$

$$\text{avec} \quad \eta_1 = \frac{y-\ell}{a\,x} \tag{26'}$$

Au point x, y le jet considéré induit une faible quantité de mouvement.

(27) $$\rho \Delta(u^2) = \rho\, U_s^2 \cdot \frac{c\,\Delta\ell}{x} \cdot f'^2$$

Nous pouvons toujours prendre $\Delta\ell$ aussi faible que nous voulons, de manière que nous puissions considérer, quelque que soit x que $\frac{x}{\Delta\ell}$ est grand. Ce qui entraîne la validité de la solution $f(\eta)$ puisque nous l'avons supposé valable si nous nous trouvons suffisamment loin par rapport à la largeur de l'ajutage.

Nous supposerons que dans le domaine à l'aval de l'ajutage la pression statique est égale à la pression atmosphérique, ce qui est vrai en dehors du corps potentiel. La résultante des forces de pression étant nulle, la quantité de mouvement du jet au point M est égale à la somme des quantités de mouvement de chaque jet en ce point (théorème d'Euler).

Ce qui revient donc à poser à partir de (27) :

$$\rho u^2 = \rho \int_{-L_s/2}^{L_s/2} U_s^2 \cdot \frac{c}{x} \cdot f'^2 \cdot d\ell$$

L'équation devient :

(28) $$u^2(x,y) = \frac{U_s^2 \cdot c}{x} \int_{-L_s/2}^{L_s/2} f'^2(\eta_1) \cdot d\ell$$

avec $$\eta_1 = \frac{y-\ell}{a\,x}$$

Posons $$\frac{L_s}{2\,a\,x} = \ell_s$$

L'équation (28) se met sous la forme :

(29) $$u^2(x,y) = U_s^2 \cdot a\,c \int_{\eta-\ell_s}^{\eta+\ell_s} f'^2(\eta_1) \cdot d\eta_1$$

Puisque nous avons effectué une sommation des quantités de mouvement élémentaires, la quantité de mouvement du jet principal sur une section

sera la somme des quantités de mouvement de chaque jet élémentaire sur cette même section. Par conséquent, si nous supposons $J(x)$ constant, la quantité de mouvement à travers une section transversale sera égale à la quantité de mouvement du jet à la sortie de l'ajutage, donc $K_1 = 1$. Et la relation (13) s'applique ainsi que (24') pour l'expression résultante.

Nous avons totalement déterminé le jet par la connaissance du profil $f(\eta)$ et par la détermination de a .

$$a.c = \frac{1}{2\int_0^\infty f^2 . d\eta}$$

et si la quantité de mouvement $J(x)$ varie, nous poserons $K_1 = k_1(x)$ et :

(30) $$a.c = \frac{k_1(x)}{2\int_0^\infty f^2 . d\eta}$$

Nous devons vérifier que le profil pour $x \longrightarrow \infty$ est voisin de

$$u(x,y) \,/\, u(x,0) = F(\eta)$$
$$x \longrightarrow +\infty \qquad l_s \longrightarrow 0$$

Comme f est une fonction symétrique par rapport à y on peut écrire :

$$\int_{\eta - l_s}^{\eta + l_s} f^2(\eta_1) . d\eta_1 = \int_{\eta - l_s}^{\eta} f^2(\eta_1) . d\eta_1 + \int_{\eta}^{\eta + l_s} f^2(\eta_1) . d\eta_1$$

On peut poser

$$\int_{\eta - l_s}^{\eta} f^2(\eta_1) . d\eta_1 = \int_{\eta}^{\eta + l_s} f^2(\eta_1) . d\eta_1 \simeq l_s . f^2(\eta)$$

Et (29) devient :

$$u^2(x,y) = U_s^2 . \frac{c}{x} . l_s . f^2(\eta)$$

La condition est vérifiée.

Regardons ce que devient (29) lorsque nous faisons tendre χ vers 0. Nous cherchons à déterminer le profil au voisinage de la buse.

Nous considérerons $\eta > 0$ car la fonction (29) est symètrique par rapport à l'axe ox .

Lorsque $x \to 0$, les bornes de la fonction (29) deviennent :

$$\eta + \ell_s \to +\infty$$

$$\eta - \ell_s \to +\infty \quad \text{si} \quad \eta > \ell_s$$

$$\to -\infty \quad \text{si} \quad \eta < \ell_s$$

$$\eta > \ell_s \Rightarrow y > \frac{L_s}{2}$$

La fonction (29) devient :

$$u^2(x,y)/U_s^2 \to ac \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt \quad \text{si} \quad y < \ell_s/2$$

En utilisant (30) on trouve :

$$u^2(x,y)/U_s^2 \to 1 \quad \text{si} \quad |y| < L_s/2$$

et

$$u^2(x,y)/U_s^2 \to \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t).dt = 0 \quad \text{si} \quad |y| > \ell_s/2$$

La fonction $f(\eta)$ pourra être choisie parmi les solutions que nous avons présentées auparavant ; cependant nous retiendrons les deux expressions qui sont les plus compatibles avec les expériences et qui découlent des hypothèses les plus récentes.

I. 4. 1. Utilisation de la solution de Reichardt

Nous avons supposé que $\rho \overline{u'^2}$ est négligeable et nous pourrons prendre le profil de Reichard sous la forme : $f = e^{-\eta^2/4}$

Remarquons que si nous ne faisons pas cette hypothèse, l'équation (29) est valable sous la forme :

$$(\overline{u+u'})^2 = U_s^2 . a.c \int_{\eta-\ell_s}^{\eta+\ell_s} f^2(\eta_1).d\eta$$

Cette relation permet de connaître la pression dynamique mais on n'aura pas l'expression de la vitesse.

La relation (29) devient :

$$u^2 = U_s^2 \, a.c. \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} \, dt$$

Cette fonction n'est pas intégrable et on doit faire appel à la fonction " erf " dont nous avons parlé plus haut :

En remarquant que :

$$\int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u^2(x,y) = U_s^2 \cdot a.c. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[erf\left(\frac{t_2}{\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{t_1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

En tenant compte de (30), on peut écrire :

(31) $$\boxed{u^2(x,y) = U_s^2 \cdot \frac{k_1}{2} \left[erf\left(\frac{t_2}{\sqrt{2}}\right) - erf\left(\frac{t_1}{\sqrt{2}}\right) \right]}$$

avec $t_1 = -\ell_s + \eta$

$t_2 = \ell_s + \eta$

Cette équation constitue une expression relativement simple et qui est complètement déterminée lorsque l'on connait a et k_1 .

I.4.2. Utilisation de la solution de Goertler

Le profil de Goertler pour la région III est particulièrement intéressant car il est intégrable avec

$$f(\eta) = 1 - th^2\eta$$

(29) devient :

$$u^2(x,y) = U_s^2 \, a.c \int_{t_1}^{t_2} (1 - th^2 t)^2 \, dt$$

et $$u^2(x,y) = U_s^2 \, a \, c \left[th\, t_2 - th\, t_1 - \frac{1}{3}\left(th^3 t_2 - th^3 t_1\right) \right]$$

En tenant compte de (30) et en remarquant que :

$$\int_0^\infty (1 - th^2 t)^2 \, dt = \frac{2}{3}$$

(32) $$u^2(x,y) = U_s^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot k_1 \left[th\, t_2 - th\, t_1 - \frac{1}{3}\left(th^3 t_2 - th^3 t_1\right) \right]$$

avec : $$t_1 = \eta - \ell_s$$

$$t_2 = \eta + \ell_s$$

I.4.3. Discussion sur les solutions proposées

D'un point de vue strictement pratique, il est plus facile d'utiliser la solution (32) qui fait appel à la fonction th .

Pour comparer les résultats entre eux, nous ferons coïncider le profil de la vitesse sur l'axe à l'infini, ce qui revient à prendre pour " c " le même coefficient dans les deux cas.

On déterminera le coefficient C à l'aide du coefficient expérimental Γ de Goertler en supposant que $k_1 = 1$

Pour le profil (32) nous prendrons :

$$c = \frac{3}{4}\,\Gamma \qquad \text{et} \quad a = \frac{1}{\Gamma}$$

Pour le profil (31) nous prendrons :

$$c = \frac{3}{4}\,\Gamma \qquad \text{et} \quad a = \frac{2}{3\Gamma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Nous voyons figure 18.a que les courbes sont identiques dans un large domaine. Par contre, aux faibles vitesses, nous relevons des différences sensibles. Elles sont dues principalement au fait que les profils de Reichardt et de Goertler comportent aussi ces mêmes différences. Nous comparerons par la suite les résultats expérimentaux obtenus dans cette zone à ceux donnés par les courbes théoriques.

Dans la région I nous comparons le profil de l'équation (32) au profil qui est proposé par Goertler avec pour coefficient ∇ de la variable ξ de (21) :

$$\nabla = 13,5$$

valeur donnée par comparaison aux résultats de Reichardt. On remarque (fig. 18.b) que l'on a déplacé le profil de Goertler de sorte que

$$u(x, \ell_s) = 0,7 . u(x, 0)$$

L'examen des deux résultats montrent dans cette zone une différence assez importante dans ce domaine. Cependant les résultats expérimentaux de Reichardt se placent au-dessus de la courbe de Goertler pour ce qui est des vitesses $< 0,7 U_m$ et au-dessous dans l'autre zone.

I.4.4. Effet de la couche limite à la sortie de la buse

Avec cette méthode on peut tenir compte de la répartition des vitesses à la sortie de la buse. En fait, c'est de la répartition des vitesses au pôle qu'il faut dire.

Si l'on connait la vitesse au pôle $u(0,y)$, on singularisera chaque jet élémentaire par la vitesse $u(0,y)$.

L'équation (27) devient :

$$\Delta(u^2) = u(0,\ell)^2 . \frac{c . \Delta\ell}{S} . f^2$$

En posant :

$$\rho \int_{-Ls/2}^{Ls/2} u^2(0,\ell).d\ell = J_s = \rho U_s^2 \int_{-B/2}^{B/2} g^2(\ell).d\ell = \rho U_s^2 . Ls$$

(29) devient :

$$(33)\quad u^2(s,y) = a.c.U_s^2 \int_{\eta-b/2}^{\eta+b/2} g^2(y-\eta_1 a s).f^2(\eta_1).d\eta_1$$

$$g\left(\frac{B}{2}\right) = g\left(-\frac{B}{2}\right) = 0 \qquad b = \frac{B}{Ls}$$

g étant défini par :

$$(34)\quad \int_{-1/2}^{1/2} g^2(Ls.t)\,dt = 1$$

Nous emploierons (33) et (34) pour résoudre le problème du jet plan entre deux parois. Nous vérifierons ainsi expérimentalement le bon accord entre la théorie que nous proposons et l'hypothèse.

I. 4. 5. Généralisation de la solution proposée

Il est possible de donner à la formule (29) une généralisation suivant les paramètres pour $\alpha = 0$. En particulier, nous nous proposons de traiter en dehors du sujet le problème du jet à symétrie axiale et celui du jet issu d'un orifice rectangulaire. Ces deux problèmes de jets non confinés sont importants. Nous donnons en annexe les solutions que nous proposons à partir des hypothèses communes à celles du paragraphe I. 4.

Nous pensons que même en Fluidique les jets à symétrie axiale sont utilisés, en particulier dans les amplificateurs à impact.

REFERENCES

- : -

1. SCHLICHTING H.
   Boundary layer theory - Mac Graw Hill Book Company (1960)

2. PRANDTL L.
   Über die ansgelildete Turbulenz - Int. Congr. Appl. Mechanics (1926)

3. TAYLOR G.I.
   Conditions at the surface of a hot body exposed to the wind - ARC C. and M. 272 (1919)

4. PRANDTL L.
   Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz VDI. Forschungsheft - Berlin (1951)

5. REICHARDT H.
   Uber eine neue Theorie der freien Turbulenz ZAMM 21, 257 (1942)

6. ABRAMOVITCH G.N.
   The theorie of Turbulent jets. The M.I.T. Press 1963

7. TOLLMIEN W.
   Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge ZAMM 6, 468 (1926)

8. GOERTLER H.

Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf grund eines neuen Näherungsansatzes
ZAMM 22, 244 (1942)

9. REICHARDT H.

Impuls und Wärmeaustausch in freier Turbulenz
ZAMM 24 (1944)

10. FLORENT P.

Etude expérimentale des "zones non établies" des jets subsoniques turbulents à symétrie de révolution débouchant dans une atmosphère initialement immobile
Thèse (1966)

11. REICHARDT H.

Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz
VDI Forschungsh (1951)

12. DAT J. et FABRE J.

Méthode de détermination du profil des vitesses du jet plan turbulent connaissant les caractéristiques au pôle
C R A S. tome 270, série A, page 824.

CHAPITRE II

- : -

ETUDE THEORIQUE DE L'INTERACTION DE JETS

Nous avons porté figure 19a. le schéma de l'écoulement dans la zone d'intéraction des jets de commande et d'alimentation. Nous supposerons que le problème pourra être résolu en faisant les hypothèses suivantes :

- les deux jets intéragissent dans une zone voisine des sorties des deux ajutages. A une très faible distance, ils ont pris un certain angle de déviation et se comportent comme un seul et même jet.
  On pourra donc appliquer la théorie précédente à l'aval de la zone d'intéraction.

- dans la zone considérée, les effets dus à la viscosité et à la turbulence, sont négligeables et nous considérerons le fluide parfait et l'écoulement irrotationnel.

- Nous singulariserons chaque jet en les séparant par la ligne de courant Ψ_o . Pour cette ligne de courant nous ferons la supposition que c'est une droite. C'est une hypothèse qui peut paraître assez grossière, mais les résultats obtenus permettront de vérifier sa validité.

Le problème considéré revient donc à résoudre l'écoulement sur une plaque, tel qu'il est représenté sur la figure 19b.

II.1. ECOULEMENT DU JET SUR LA PLAQUE

Le problème considéré revient à résoudre celui des jets liquides de manière particulière. Nous renvoyons pour cette étude à la très intéressante synthèse faite par Jacob (réf. 1).

Dans la représentation de l'écoulement figure 19b du plan z, on remarque que sur la ligne de jet λ le module du vecteur vitesse est constant et égal à V_0 puisque le potentiel reste le même à l'intérieur du fluide et que sur λ la pression statique est nulle.

Sur les lignes $\overline{w_2}$ et $\overline{w_1}$, limites matérielles de la buse, l'angle que fait le vecteur vitesse avec ox est nul. Et sur $\overline{w_2}'$ l'angle sera pris égal à α constante indéterminée.

Posons la vitesse complexe sous la forme :

$$w = V_0 e^{-i\omega} \tag{35}$$

dans laquelle :

$$\omega = \theta + i\zeta \tag{36}$$

$$w = V_0 e^{\zeta} \cdot e^{-i\theta} = u - iv$$

ce qui donne bien $u = V_0 e^{\zeta} \cdot \cos\theta$

$$v = V_0 e^{\zeta} \cdot \sin\theta$$

Nous passons du plan z au plan $f(z)$ (fig. 20a) avec :

$$f = \varphi + i\psi$$

comme nouvelle variable.

Les valeurs aux limites des variables f et z deviendront :

sur	$\overline{w_1}$	$\psi = h/2$	$\theta = 0$
sur	λ	$\psi = h/2$	$\zeta = 0$

sur $\overline{\omega}_2$ $\quad \Psi = 0 \quad \theta = 0$

sur $\overline{\omega}'_2$ $\quad \Psi = 0 \quad \theta = \alpha$

II. 1. 1. Première transformation

Nous passons du plan f au plan z (fig. 20. b) par la transformation $f(z)$ qui fait correspondre les frontières conformément aux figures 20. a et 20. b.

Les points A, J, B, O ont leur homologue sur le cercle et les affixes de ces points dans le plan Z seront déterminés par la suite.

Sur la circonférence nous connaissons la valeur de Ψ qui peut être considérée comme la partie réelle de la fonction g définie par :

$$g = \Psi - i\varphi$$
$$f = ig$$

Puisque nous connaissons la partie réelle de g sur la frontière du domaine, on peut connaître g à l'intérieur du domaine.

Appliquons le théorème de Schwartz-Villat :

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\tau) \cdot \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} \, d\tau$$

Il vient :

$$g(z) = \frac{h}{4\pi} \left[-\tau - 2i \cdot \log(z - e^{i\tau}) \right]_0^{\pi\alpha} + \frac{h}{4\pi} \left[-\tau - 2i \log(z - e^{i\tau}) \right]_{\pi}^{2\pi}$$

et la fonction f devient :

$$(37) \qquad f(z) = \frac{h}{2\pi} \log \frac{z - e^{i\pi\alpha}}{z + 1} - \frac{ih}{4\pi} (\pi + \pi\alpha)$$

On vérifie que, à l'aide de cette équation et en prenant pour détermination du logarithme celle qui est sur le segment $]-\pi, +\pi]$ pour $Z = e^{i\tau}$ (point sur la circonférence) :

$$f(e^{i\tau}) = \frac{h}{2\pi} \log \frac{\sin \frac{\tau - \pi\alpha}{2}}{\cos \frac{\tau}{2}}$$

Nous voyons que pour $\tau < \tau_a$ ou $\tau > \pi$, l'expression sous le logarithme est négative et la partie imaginaire de $f(e^{i\tau})$ est $\frac{h}{2}$. Pour les autres valeurs de τ, ce paramètre est nul, ce qui est conforme aux hypothèses.

L'expression ci-dessus nous permet de déterminer la valeur de τ_a et de τ_o. Nous savons que le point J est à un potentiel φ_a forcément négatif. Au point J, on aura :

$$f = \varphi_a + i\,\frac{h}{2}$$

(38) $$\tau_a = 2\,\text{Arc sin.}\, e^{\frac{2\pi\varphi_a}{h}}$$

Pour que $e^{\frac{2\pi\varphi_o}{h}}$ soit un sinus, il faut que φ_a soit négatif. Nous remarquons aussi que le sinus étant positif, l'angle, c'est-à-dire $\frac{\tau_a}{2}$, est compris entre 0 et $\pi/2$.

Par conséquent :

$$0 < \tau_a < \pi$$

Nous trouvons facilement que τ_o est égal à :

$$\tau_o = \frac{\pi + \tau_a}{2} \quad \ldots\ldots$$

II.1.2. Deuxième transformation

On transforme le plan des Z du cercle, dans le plan des ζ du demi-cercle, de manière que le diamètre représente la ligne de jet λ.

La transformation d'un cercle en un demi-cercle est connue, il s'agit de :

(39) $$Z = -i\,\frac{\zeta^2+1+2i\zeta}{\zeta^2+1-2i\zeta}$$

Les points A, J, B, O du plan Z ont leur homologue sur le demi-cercle du plan ζ et les limites qu'ils définissent sont celles des lignes $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega'_2}$ et λ .

La détermination de l'affixe de J et de O se fait en calculant $\zeta(e^{i\gamma})$.

Nous trouvons

$$Z = -i\,\frac{\cos\gamma + i}{\cos\gamma - i}$$

Le module de Z est bien égal à 1 et l'on peut poser :

$$Z = e^{i\tau}$$

$$\tau = \mathrm{Arg}(-i) + \mathrm{Arg}(\cos\gamma + i) - \mathrm{Arg}(\cos\gamma - i)$$

qui donne :

$$\tau = -\frac{\pi}{2} + 2\,\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{\cos\gamma}$$

Le calcul de γ_o et γ_a se déduit de l'expression ci-dessus :

$$\gamma_a = \mathrm{Arc\,cos}\left[\mathrm{cotg}\left(\frac{\tau_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\gamma_o = \mathrm{Arc\,cos}\left[-\mathrm{tg}\,\frac{\tau_a}{4}\right]$$

Comme τ_a est sur le segment $[0, \pi]$, $-\mathrm{tg}\left[\frac{\tau_a}{4}\right]$ est sur le segment $[0, -1]$, et γ_o sera donc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

II.1.3. Calcul de $\omega(\zeta)$

Nous avons fait en sorte que, dans le plan ζ , la ligne de jet soit représentée par le diamètre. Ainsi nous connaissons la valeur de θ sur le demi-cercle, et celle de σ sur le diamètre.

Comme la partie imaginaire de ω est nulle sur le diamètre, nous pouvons appliquer le principe de symétrie, c'est-à-dire que nous aurons sur le cercle complet la relation :

$$\omega(\zeta) = \overline{\omega(\bar{\zeta})}$$

ou encore que $\theta(\zeta) = \theta(\bar{\zeta})$, et en particulier que :

(40) $$\theta(\gamma) = \theta(2\pi - \gamma)$$

En appliquant le théorème de Schwartz-Villat sur la circonférence entière, nous avons :

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta(\gamma) \cdot \frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}\, d\gamma$$

qui devient avec (40) :

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \theta(\gamma)\left[\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta} + \frac{e^{-i\gamma}+\zeta}{e^{-i\gamma}-\zeta}\right] d\gamma\right.$$

Sachant que θ prend les valeurs :

$\theta = \alpha$ $\qquad \gamma_0 < \gamma < \pi$

$\theta = 0$ $\qquad \gamma < \gamma_0$

Nous trouvons tous calculs faits :

(41) $$\omega(\zeta) = -\frac{i\alpha}{\pi} \log \frac{1-\zeta e^{i\gamma_0}}{\zeta - e^{i\gamma_0}}$$

En prenant pour le logarithme la détermination $]-\pi, \pi]$

Si ζ est un point de la circonférence, nous aurons :

$$\omega(e^{i\gamma}) = -\frac{i\alpha}{\pi} \cdot \log \frac{\sin \frac{\gamma_0+\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma_0-\gamma}{2}}$$

La partie réelle de ω donc θ sera bien nulle si $\sin \frac{\gamma_0-\gamma}{2} > 0$ donc si $\gamma < \gamma_0$ et égale à α si $\gamma > \gamma_0$.

II. 1. 4. Expression de $3(f)$

L'ensemble des transformations conduit à la connaissance d'une part de $f(\zeta)$ et de l'autre à celle de $\omega(\zeta)$. Comme :

$$w = \frac{df}{d3} = V_0 e^{-i\omega}$$

(42) $$d3 = \frac{1}{V_0} e^{i\omega(\zeta)} \cdot f'_\zeta \cdot d\zeta$$

Par une intégration, en partant d'un point connu, nous pouvons connaître $3(\zeta)$.

Nous avons l'expression de l'écoulement irrotationnel sous forme paramétrique.

II. 1. 5. Expression des coordonnées de J

Ce qui nous intéresse, c'est de connaitre la position de J lorsque φ_a et α sont déterminés.

Calculons df et appliquons l'équation (42)

$$df = \frac{h}{2\pi}\left[\frac{1}{z - e^{i\pi\alpha}} - \frac{1}{z+1}\right] dz$$

$$dz = \frac{4(1-\zeta^2)}{(1-2i\zeta+\zeta^2)}\, d\zeta$$

En prenant l'origine des 3 en O nous aurons

(43) $$3_J = \int_{\widehat{OJ}} \frac{2h}{\pi V_0} e^{i\omega} \cdot \frac{1-\zeta^2}{(1-2i\zeta+\zeta^2)^2}\left[\frac{1}{z - e^{i\pi\alpha}} - \frac{1}{z+1}\right] d\zeta$$

Nous pouvons connaître cependant directement y_J . Rappelons à cet effet que dans toute la masse fluide, nous pouvons écrire l'équation

de Lagrange :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C^{te} = \frac{V_o^2}{2}$$

Il est facile de calculer la vitesse à l'infini amont, c'est-à-dire au point B. Dans le plan ζ, l'affixe de B est $e^{i\delta a}$.

$$V_\infty = V_o \left[\frac{\sin \frac{\gamma_o - \gamma_a}{2}}{\sin \frac{\gamma_o + \gamma_a}{2}} \right]^{\alpha/\pi}$$

Formule qui se simplifie en remarquant que :

$$tg^2 \frac{\gamma_o}{2} = tg \frac{\tau_o}{2}$$

et

$$tg^2 \frac{\gamma_a}{2} = tg \frac{\tau_a}{2}$$

Nous trouvons la nouvelle expression de $\frac{V_\infty}{V_o}$:

$$\frac{V_\infty}{V_o} = \left[\frac{1 - \sqrt{2t} + t}{1 + \sqrt{2t} + t} \right]^{\alpha/\pi}$$

dans laquelle :

$$t = tg \frac{\tau_a}{4} \quad \text{où} \quad \tau_a = 2 \, Arc \sin e^{\frac{2\pi \varphi_a}{h}}$$

Le débit s'exprime facilement :

$$(44) \quad Q = V_\infty \cdot y_3 = V_o \left[\frac{1 - \sqrt{2t} + t}{1 + \sqrt{2t} + t} \right]^{\alpha/\pi} \cdot y_3$$

et puisque $Q = \psi_1 - \psi_o = \frac{h}{2}$

Nous pouvons en déduire : y_3 ,

(44') $$y_J = \frac{h}{2V_0}\left[\frac{1+\sqrt{2t}+t}{1-\sqrt{2t}+t}\right]^{\alpha/\pi}$$

Si la pression d'arrêt reste constante, et si y_J reste constant, nous pouvons calculer Q en remarquant que :

$$p_i = \rho\frac{V_0^2}{2}$$

II.2. CALCUL PRATIQUE DE Q

Nous venons de voir que Q était de la forme :

$$Q = V_0 \cdot y_J \left[G(\nabla a)\right]^{\alpha/\pi}$$

Comme d'autre part ∇a est aussi fonction de Q puisque nous avons :

$$\sin \nabla a = e^{\pi\varphi a/Q}$$

la fonction ci-dessus devient :

$$Q = V_0 \cdot y_J \cdot \left[G(\varphi a, Q)\right]^{\alpha/\pi}$$

Si Q et φa sont déterminés ainsi que V_0, nous allons trouver différents couples y_J, $\frac{\alpha}{\pi}$. Mais nous désirons fixer y_J, ce qui revient à fixer la largeur de la buse. Nous aurons donc à résoudre une fonction de la forme :

$$Q = F(Q)$$

pour chaque valeur des autres paramètres.

Ce genre d'équation se résoud numériquement par approximations successives. En posant $Q = Q_0$, on calcule $Q_1 = f(Q_0)$, $Q_2 = f(Q_1)$ etc... La méthode converge rapidement.

y_J ayant été maintenu constant, nous devons connaître x_J . Sa détermination a été faite numériquement.

II. 3. CALCUL DE x_J

Nous partons de l'expression de z_1 (43). Cette expression se simplifie. Pour cela nous posons :

$$A = -i(\zeta^2 + 1 + 2i\zeta)$$

$$B = \zeta^2 + 1 - 2i\zeta$$

df devient

$$df = \frac{2h}{\pi}\left[\frac{1+e^{i\sigma a}}{(A+B)(A-Be^{i\sigma a})}\right]\cdot(1-\zeta^2)\,d\zeta$$

soit encore :

$$df = \frac{h}{\pi}(1+i)(1+e^{i\sigma a})\,\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{A-Be^{i\sigma a}}$$

et (43) devient :

$$z_J = \frac{h}{\pi}\,\frac{(1+i)(1+e^{i\sigma a})}{V_0}\cdot\int_{\overrightarrow{OJ}}\frac{e^{i\omega}}{A-Be^{i\sigma a}}\cdot\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\cdot d\zeta$$

Il faut pour intégrer z_0 choisir un chemin d'intégration qui mène de (O) à (J) dans le plan ζ. Nous ne pouvons prendre l'arc $\overset{\frown}{(O),(J)}$ car x_J deviendrait infini au point (B) puisque c'est le point à l'amont.

Nous avons choisi le rayon vecteur qui relie le point (O) au centre du demi-cercle, et la portion de l'axe réel entre ce dernier point et le point (J).

Mais au point (O) qui est un point anguleux, V devient nul, ce qui signifie que $\left|e^{i\omega}\right| \longrightarrow \infty$.

Le point O est donc singulier pour la fonction considérée.

Pour faire une intégration numérique, nous ne devons pas passer par la forme $\zeta = e^{i\gamma_0}$.

Nous fractionnons donc cette première intégrale en deux :

$$3_{1j} = C\left[\int_{e^{i\gamma_0}}^{e^{i\gamma_0}-\varepsilon} F(\zeta)\,d\zeta + \int_{e^{i\gamma_0}-\varepsilon}^{0} F(\zeta).\,d\zeta\right]$$

Nous calculerons la seconde et en faisant un développement limité, nous expliciterons la première.

II. 3. 1. Intégrale sur le rayon vecteur

Sur le rayon vecteur nous aurons :

$$e^{i\omega} = \left[\frac{1-\zeta e^{i\gamma_0}}{\zeta - e^{i\gamma_0}}\right]^{\alpha/\pi}$$

Nous poserons $\zeta = R e^{i\gamma_0}$

$e^{i\omega}$ est calculé sous la forme : $R_1 e^{i\theta_1}$ où θ_1 est l'argument :

$$\longrightarrow R_1 = \left[\frac{\sqrt{R^2+1-2R\cos 2\gamma_0}}{1-R}\right]^{\alpha/\pi}$$

$$\longrightarrow \theta_1 = \frac{\alpha}{\pi}\left[\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{R+1}{R-1}\,.\,\mathrm{tg}\,\gamma_0\right)\right]$$

où la détermination de l'arctangente est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

$\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}$ devient, sous la forme $R_2 e^{i\theta_2}$

$$\longrightarrow R_2 = \frac{\sqrt{1+R^2(\sin^2\gamma_0-2)+R^4}}{1+2R\cos\gamma_0+R^2}$$

$$\longrightarrow \theta_2 = \text{Arc tg}\,\frac{R\sin\gamma_0}{R^2-1}$$

En posant : $e^{i\gamma_0}\left(1+e^{i\sigma_a}\right)(1+i) = R_3 . e^{i\theta_3}$

$$\longrightarrow R_3 = 2\sqrt{1+\cos\sigma_a}$$

$$\longrightarrow \theta_3 = \text{Arc tg}\,\frac{\sin\sigma_a}{1+\cos\sigma_a} + \frac{\pi}{4} + \gamma_0$$

Les parties réelles de $A - Be^{i\sigma_a}$ deviennent :

$$X_4 = 2R\left[\cos\gamma_0 - \sin(\sigma_a+\gamma_0)\right] + \sin 2\gamma_0(\sin\sigma_a+1) - (1+R^2\cos 2\gamma_0)\cos\sigma_a$$

$$Y_4 = 2R\left[\sin\gamma_0 + \cos(\sigma_a+\gamma_0)\right] - \sin 2\gamma_0 . \cos\sigma_a - (1+R^2\cos 2\gamma_0)(\sin\sigma_a+1)$$

La première intégrale devient :

$$3_{1J} = \frac{h}{\pi V_0} \cdot R_3 . e^{i\theta_3} \int_{1-\varepsilon}^{0} \frac{R_1}{R_4} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_4)} \cdot dR$$

où

$$R_4 . e^{i\theta_4} = X_4 + iY_4$$

II. 3. 2. Intégrale sur l'axe réel

Sur Ox les expressions se simplifient puisque $\zeta = x$

De plus, comme nous sommes sur la ligne de courant λ

$$\zeta = 0 \quad \text{et} \quad e^{i\omega} = e^{i\theta}$$

avec

$$e^{i\theta} = \left[\frac{1 - x_0 e^{i\gamma_0}}{x - e^{i\gamma_0}} \right]^{\alpha/\pi}$$

où

$$\theta = \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{Arc\,tg} \frac{\sin\gamma_0 (1 - x^2)}{2x - \cos\gamma_0 (1 + x^2)}$$

Nous mettons $A - B e^{i\sigma_a}$ sous la forme : $R_5 e^{i\theta_5}$ et les parties réelles et imaginaires sont :

$$X_5 = 2x(1 - \sin\sigma_a) - (x^2 + 1)\cos\sigma_a$$

$$Y_5 = 2x\cos\sigma_a - (x^2 + 1)(\sin\sigma_a + 1)$$

En posant de plus :

$$\theta_3' = \operatorname{Arc\,tg} \frac{\sin\sigma_a}{1 + \cos\sigma_a} + \frac{\pi}{4}$$

L'intégrale devient :

$$\zeta_{23} = \frac{h}{\pi V_0} \cdot R_3 \cdot e^{i\theta_3'} \cdot \int_0^1 \frac{1 - x}{1 + x} \cdot \frac{e^{i(\theta - \theta_5)}}{R_5} \cdot dx$$

II. 3. 3. Intégrale au voisinage de la singularité

Posons :

$$f_1 = e^{i\omega} \cdot \left[\frac{1}{A - B e^{i\sigma_a}} \right] \cdot \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$$

avec $$e^{i\omega} = \left[1 - \zeta e^{i\gamma_0} \right]^{\alpha/\pi} \cdot \left[\zeta - e^{i\gamma_0} \right]^{-\alpha/\pi}$$

Le terme singulier de f_1 au voisinage de $\zeta = e^{i\gamma_0}$ est

$$\left(\zeta - e^{i\gamma_0}\right)^{-\alpha/\pi}$$

Nous mettrons f_1 sous la forme :

$$f_1 = \left[e^{i\gamma_0} - \zeta\right]^{-\alpha/\pi} \cdot f_2$$

avec :

$$f_2 = \left[\zeta e^{i\gamma_0} - 1\right]^{\alpha/\pi} \cdot \left[\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right] \cdot \frac{1}{A - B e^{i\sigma_a}}$$

Nous développerons f_2 en écrivant :

$$f_2\left(e^{i\gamma_0} + d\zeta\right) = f_2\left(e^{i\gamma_0}\right) + d\zeta \cdot f_2'\left(e^{i\gamma_0}\right)$$

avec en l'occurence :

$$d\zeta = -\varepsilon\, e^{i\gamma_0}$$

Il vient, tous calculs faits :

$$f_2'\left(e^{i\gamma_0}\right) = -\frac{\left[e^{2i\gamma_0} - 1\right]^{\alpha/\pi}}{A - B e^{i\sigma_a}} \cdot \left[\frac{1}{1+e^{i\gamma_0}}\right] \cdot \left[\frac{\frac{\alpha}{\pi} e^{i\gamma_0} + 2}{e^{i\gamma_0} + 1} + \frac{A' - B' e^{i\sigma_a}}{A - B e^{i\sigma_a}}\left(1 - e^{i\gamma_0}\right)\right]$$

Et nous intégrons f_1 par rapport à ε en posant :

$$\left[e^{i\gamma_0} - \zeta\right]^{-\alpha/\pi} = e^{-i\frac{\alpha}{\pi}\gamma_0} \cdot \left[\varepsilon\right]^{-\alpha/\pi}$$

L'expression de Z_{3J} devient :

$$Z_{3J} = \frac{h}{\pi V_0}\left(1 + e^{i\sigma_a}\right)(1+i) \cdot e^{i\gamma_0\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)}\left[e^{i\gamma_0} \cdot f_2'\left(e^{i\gamma_0}\right) \cdot \frac{\varepsilon^{2-\frac{\alpha}{\pi}}}{2-\frac{\alpha}{\pi}} - f_2\left(e^{i\gamma_0}\right)\frac{\varepsilon^{1-\frac{\alpha}{\pi}}}{1-\frac{\alpha}{\pi}}\right]$$

II. 3. 4. Calcul de $\mathfrak{Z}_J$

Pour extraire des expressions précédentes les valeurs de $\mathfrak{Z}_J$ en fonction des paramètres φ_a , α/π, V_o , nous avons utilisé le calculateur de la faculté des sciences de Toulouse. A l'aide de Fortran IV nous avons programmé :

$$\mathfrak{Z}_J = \mathfrak{Z}_{1J} + \mathfrak{Z}_{2J} + \mathfrak{Z}_{3J}$$

Dans $\mathfrak{Z}_{1J}$ et $\mathfrak{Z}_{2J}$ nous avons séparé partie réelle et partie imaginaire et utilisé pour l'intégration la méthode de Simpson. La valeur de $\mathfrak{Z}_{3J}$ a été calculée en programmant directement en complexe.

Bien que nous n'ayons pas eu besoin de $\mathcal{Y}_J$, que l'équation (44) fournit, nous avons tenu à le calculer de manière à faire une vérification indirecte.

En fixant $\mathcal{Y}_J$ nous avons sorti $\mathcal{X}_J$ et Q en fonction de φ_a et α/π , V_o étant posé égal à 1.

Remarquons qu'il est facile de connaître $\mathcal{X}_J$ et Q pour une autre valeur de V_o . Nous avons défini Q comme une fonction implicite de la forme :

$$V_o \cdot \mathcal{Y}_J \cdot \left[G(\varphi_a/Q) \right]^{\alpha/\pi} - Q = 0 .$$

Nous ne changeons rien à cette équation si nous multiplions ou divisons V_o , Q et φ_a par un même nombre. D'autre part, dans l'expression (43) nous ne changeons pas $\mathfrak{Z}_J$ si nous faisons la même opération. Cela signifie que :

$$\mathfrak{Z}_J \left(V_o, \varphi_a, Q, \frac{\alpha}{\pi} \right) = \mathfrak{Z}_J \left(V_o t, \varphi_a t, Q t, \frac{\alpha}{\pi} \right)$$

Nous avons porté figure 21.a les valeurs de $\frac{V}{V_0}$ en fonction de $1-\frac{d}{H}$ pour diverses valeurs de x_J .

Comme dans les essais ultérieurs, nous avons utilisé l'angle complémentaire de celui qui est défini figure 19.a nous avons porté en abscisse $1-\frac{d}{H}$.

$\frac{V}{V_0}$ représente un coefficient de débit fictif de la buse considérée. Le débit dans un ajutage est influencé par l'écoulement dans l'autre.

Les angles choisis sont faibles et correspondent aux cas expérimentaux que nous examinerons. Les abscisses x_J ne sont pas inférieures à 1 en valeur absolue car les essais ont montré que dans les amplificateurs proportionnels l'arête ne peut se trouver très proche de la buse principale.

Les courbes sont croissantes : lorsque l'angle s'ouvre, le coefficient de débit augmente, ce à quoi nous devions nous attendre. $\frac{V}{V_0}$ varie fortement avec $|x_J|$ lorsque celui-ci est inférieur à 5. A partir de cette dernière valeur $\frac{V}{V_0} = 1$ et la position du jet principal n'a plus d'influence (fig. 21.b).

Nous utiliserons ces derniers résultats pour le canal de commande. Pour le cas de l'alimentation, le paramètre x_J est fixé et est égal à 0. Nous n'avons qu'une courbe à tracer (fig. 21.c), puisque nous nous rapporterons toujours à la largeur de cette buse pour les dimensions géométriques des maquettes : $Y_J = 1$

Nous constatons aussi sur cette courbe que la position de Ψ_0 a une influence sur le débit dans cette buse. Nous expliquerons par la suite pourquoi cette courbe est une droite pour les petits angles.

II. 4. DETERMINATION DE α

Nous nous reporterons aux figures 20. d et 20. e sur lesquelles figure l'écoulement lorsqu'il y a deux canaux en présence.

Nous affecterons dans la suite de l'exposé, l'indice " c " aux variables du canal latéral et l'indice " s " à celles du canal central.

II. 4. 1. Expression de α en l'absence de parois

Si les parois sont supprimées, l'écoulement est celui que nous avons représenté figure 20. d. C'est une simplification grossière mais avec le théorème d'Euler, nous obtenons rapidement la loi de déviation.

En projetant sur les deux axes, les forces appliquées au fluide étant nulles, il vient :

sur OY : $\rho Q_s V_s \sin\alpha - \rho Q_c V_c . \cos\alpha = 0$

sur OX : $\rho Q V = \rho Q_c V_c . \sin\alpha + \rho Q_s V_s \cos\alpha$

Ce qui donne :

$$Q V = \frac{Q_1 V_1}{\cos\alpha} \qquad \text{avec} \quad Q = Q_1 + Q_2$$

et la plus importante :

$$tg\,\alpha = \frac{Q_c V_c}{Q_s V_s} = \frac{J_c}{J_s}$$

En conséquence, en l'absence de parois solides la valeur de la tangente de l'angle est égale au rapport de quantité de mouvement.

Nous pouvons appliquer cette méthode globale, sans aucune restriction, à l'écoulement de la figure 20. e.

II. 4. 2. Expression de α en tenant compte des parois

Pour connaître α il faut déterminer F_c, F_s, $p_c L_c$ et $p_s L_s$.

$\overrightarrow{F_c}, \overrightarrow{F_s}$: ce sont les résultantes des forces que les parois exercent sur le fluide. Elles sont normales aux parois.

$\overrightarrow{p_c L_c}, \overrightarrow{p_s L_s}$: ce sont les forces de pression, elles sont parallèles à l'écoulement.

Nous appliquons le théorème d'Euler et projetons sur l'axe OY.

$$\rho Q_s V_s . \sin\alpha - \rho Q_c . V_c . \cos\alpha = p_c . L_c \cos\alpha - p_s L_s \sin\alpha + F_s \cos\alpha - F_c \sin\alpha$$

En posant : $J_c = \rho Q_c V_c$

$$J_s = \rho Q_s V_s$$

$$m_c = \frac{V_c}{V_{oc}}$$

$$m_s = \frac{V_s}{V_{os}}$$

Nous trouvons :

$$tg\,\alpha = \frac{J_c}{J_s} \cdot \left[\frac{1/m_c^2 + 1 + 2F_s/J_c}{1/m_s^2 + 1 + 2F_c/J_s} \right]$$

Dans cette expression nous avons trois termes :

$$\frac{J}{m^2} + J + 2F$$

$$\frac{J}{m^2} = \frac{\rho Q V}{V^2} V_o^2 = 2 p_i . L$$

Chaque élément est caractéristique :

$\frac{J}{m^2}$ représente la force due à la pression totale

J : la quantité de mouvement

$2F/J$: la réaction du mur.

Or cette dernière nous est inconnue. Pour l'expliciter, nous reprenons le schéma d'écoulement de la figure 19. b. Nous supposons que le jet s'écoule contre une plaque. Sur la figure 20. e, nous isolerons le jet d'alimentation. Les forces en présence sont les suivantes :

R_s : réaction de la plaque sur le fluide

F_s : réaction des murs parallèles sur le fluide.

En appliquant le théorème d'Euler et en projetant sur Ox , nous trouvons l'expression de F_s , la projection de R_s étant nulle.

$$\rho Q_s V_{os} - \rho Q_s V_s . \cos\alpha = p_s . L_s . \cos\alpha + F_s . \sin\alpha$$

Et F_s devient :

$$F_s = J_s \left[\frac{1}{m_s \sin\alpha} - \frac{1}{2 tg\alpha} \left(1 + \frac{1}{m_s^2} \right) \right]$$

Pour trouver F_c il suffit de remplacer les indices s par c et α par $\pi - \alpha$, ce qui revient à mettre des cosinus à la place des sinus.

$$F_c = J_c \left[\frac{1}{m_c . \cos\alpha} - \frac{tg\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{m_c^2} \right) \right]$$

Après quelques calculs, l'expression générale devient :

$$\frac{J_s}{\sin\alpha} \left[\left(\frac{1}{m_s^2} + 1 \right) - 2 \frac{\cos\alpha}{m_s} \right] = \frac{J_c}{\cos\alpha} \left[\left(\frac{1}{m_c^2} + 1 \right) - 2 \frac{\sin\alpha}{m_c} \right]$$

En remarquant que :

$$J_s = 2 m_s^2 . L_s . P_{i,s}$$

$$J_c = 2 m_c^2 . L_c . P_{i,c}$$

L'équation devient :

$$(45) \qquad \frac{P_c.L_c}{P_s.L_s} = \frac{1}{tg\,\alpha}\left[\frac{(m_s^2+1)-2\cos\alpha.m_s}{(m_c^2+1)-2\sin\alpha.m_c}\right]$$

Nous pouvons la simplifier en faisant une approximation de L_s. Comme dans l'écoulement principal, les points O et I seront toujours à la même hauteur (par symétrie), la valeur du potentiel $\varphi_{as} \longrightarrow 0$. Et nous aurons :

$$tg\,\frac{\sigma_0}{4} = 1$$

Dans l'équation (44), comme α est petit, nous pouvons faire un développement et :

$$m_s = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\alpha \Rightarrow m_s^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\alpha \text{ et } \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

L'équation (45) devient donc :

$$(45') \qquad \frac{P_c.L_c}{P_s.L_s} = \frac{\alpha\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\alpha\right)}{(m_c^2+1)-2\alpha.m_c}$$

Dans laquelle m_c est donné en fonction de α et de la position de J par les courbes de la figure 20.a.

En particulier, lorsque m_c est voisin de 1, pour les éloignements de J supérieurs à $5.L_s$.

$$\frac{P_c.L_c}{P_s.L_s} = \frac{\alpha\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\alpha\right)}{2(1-\alpha)} \simeq \frac{\alpha}{2}$$

Et l'angle prévu est deux fois plus grand que celui qui est prévu par la théorie sans parois, pour un même rapport $\frac{P_c . L_c}{P_s . L_s}$.

Nous avons porté figure 21.d, la variation du rapport $\frac{\alpha . P_s . L_s}{P_c . L_c}$ en fonction de la position de J (courbe 1).

Nous voyons que la théorie prévoit une grande influence de ce paramètre puisque à la limite, il est égal à 1 (lorsque $x_J = 0$, $m_c = 0$). D'autre part ce rapport est à peu près constant lorsque α varie, pour de petits angles.

Sur la courbe (2) de la même figure, nous avons porté le même rapport pour $\alpha = 0$, en négligeant les forces F_c et F_s . Ce terme est égal à :

$$\frac{m_c^2 + 1}{m_s^2 + 1}$$

Il varie avec α car lorsque $\alpha \nearrow$, $(m_s^2 + 1) \searrow$ et $(m_c^2 + 1) \nearrow$. D'autre part il est égal pour $\alpha = 0$ à la moitié du facteur de la courbe (1). Cela indique que l'influence des parois est prépondérante sur la déviation.

En particulier, plus F_s est grand, plus le coefficient est grand et plus F_c est faible, plus ce même coefficient diminue. Nous verrons ce que nous pouvons conclure dans notre étude expérimentale.

REFERENCES DU CHAPITRE II

-:-:-:-:-:-

I. JACOB C.

Introduction mathématique à la mécanique des fluides

Gauthier-Villars (1959)

CHAPITRE III

- : -

ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INTERACTION DE DEUX JETS

Nous nous proposons de vérifier les théories précédentes en ce qui concerne les problèmes du jet proprement dit et du phénomène d'interaction.

L'étude expérimentale nous permettra de définir un certain nombre de paramètres non calculables. Nous définirons ainsi le coefficient "a" intervenant dans l'équation (32), le coefficient k_1 pour chaque valeur de α et le profil au pôle. Nous essaierons de mettre en évidence les paramètres qui influent sur les valeurs de k_1 et de α .

MODELE EXPERIMENTAL

Pour des raisons pratiques de rapidité et de qualité des mesures, nous avons essayé d'enregistrer nos paramètres de vitesse, de pression ou de déplacement.

L'installation expérimentale que nous avons conçue permet de mesurer les vitesses ou les pressions dynamiques à l'aval d'un ajutage en présence de débits de commande, la maquette à tester pouvant être remplacée rapidement.

La figure 22 montre le schéma de principe de l'installation que l'on voit sur les photos 23.

La platine supporte la maquette qui est constituée par une pièce

en bronze rectifié sur laquelle on fixe le modèle en plexiglass. On ménage en S, E_1 et E_2 des orifices par lesquels on alimente les buses de la maquette. Celle-ci comporte un espace à l'aval des buses dans lequel on peut explorer l'écoulement à l'aide de sondes.

La platine supporte d'autre part le système d'exploration constitué par un plateau pouvant se déplacer longitudinalement le long d'une régle graduée. Ce plateau est verrouillable sur la platine. Le système d'exploration supporte un chariot, mobile latéralement, et entraîné par un ensemble vis-écrou. La vis, qui est mue par un moteur à deux sens de marche, est solidaire d'un potentiomètre électrique. On repère ainsi la position latérale du chariot par la différence de potentiel entre le curseur du potentiomètre et la masse.

Le chariot porte une sonde qui peut être soit une prise de pression dynamique associée à un capteur électrique de pression, soit une sonde à fil chaud pour détecter la vitesse (fig. 24).

Les signaux de déplacement et de vitesse (ou de pression) sont envoyés sur les entrées X et Y d'une table traçante.

Des rupteurs de fin de course limitent à droite et à gauche le champ d'investigation.

Les jeux mécaniques entre la vis et l'écrou sont rattrapés par un ressort compensateur. Pour que les mesures ne soient pas affectées par des erreurs dues au jeu des engrenages, les enregistrements seront effectués en déplaçant le chariot toujours dans le même sens.

III. 1. MESURE DES DEPLACEMENTS

La précision de mesure du déplacement dépend d'une part de la

précision mécanique et d'autre part de la précision du système transformateur d'énergie.

Les erreurs mécaniques peuvent provenir des jeux entre la vis et l'écrou et entre les engrenages. Nous avons vu que nous les avons supprimées.

Les erreurs proviennent également du potentiomètre dont le défaut de linéarité est inférieure à 0,1 %.

On commet aussi une erreur systématique lorsque l'on suppose que la tension électrique envoyée sur la table traçante est une fonction linéaire du déplacement du curseur. Cette erreur est maximale lorsque le curseur est aux deux tiers de sa course et a pour valeur :

$$\left|\frac{\Delta U}{E}\right|_{max} = \frac{4}{27}\,\frac{R}{Z}$$

où R et Z sont les impédances respectives du potentiomètre et de la table. Avec les valeurs de ces deux paramètres, le rapport est égal à 0,05%.

Il faut ajouter aussi l'imprécision et le défaut de linéarité de la table traçante (0,3%). On obtient une limite supérieure de l'erreur de mesure voisine de 0,5 %. Ajoutons à cela que la course du chariot est de 50 millimètres et l'erreur absolue que l'on peut commettre sera de 25/100mm.

On ne peut guère espérer mieux avec le matériel classique, c'est la raison pour laquelle il sera préférable d'utiliser des largeurs de la buse qui ne soient pas trop faibles. Nous avons choisi une buse de 3 mm, de manière à couvrir avec les 50 mm de course la largeur voulue lorsque le jet en aval s'étend ou lorsqu'il est dévié.

III.2. MESURE DES PARAMETRES D'ALIMENTATION ET DE COMMANDE

Pour les canaux de commandes et d'alimentation nous avons fait des mesures de débit, de pression d'arrêt, de pression statique à la sortie de la buse, et de température.

Nous avons supposé qu'entre la sonde thermométrique et la sortie de la buse, l'écoulement était adiabatique. Pour le calcul de la vitesse nous avons donc appliqué la formule de Saint-Venant.

Les mesures de pression ont toutes été faites avec des manomètres à colonnes et celles de température à l'aide d'une thermistance.

Les mesures de débit étaient plus délicates. Nous avons utilisé des diaphragmes que nous avons préalablement étabnnés à l'aide d'un compteur volumétrique dont la précision donnée par le constructeur est de 0,5 % de la valeur indiquée.

On a relevé pour chaque diaphragme la valeur moyenne du coefficient C_d défini par :

$$C_d = \frac{\rho Q}{\sqrt{\rho_2 (P_2 - P_1)}}$$

où ρQ est le débit massique et les indices 1 et 2 les conditions amont et aval du diaphragme.

Les unités sont pour chaque paramètre :

ρQ	g/s
ρ	g/l
P	cm CE

La figure (25. a) montre l'étalonnage du diaphragme 1F pour différentes conditions amont et les figures (25. b) et (25. c) donnent les relevés pour les diaphragmes 2F, 3F, 4F. La gamme de débits couverte par l'ensemble de ces diaphragmes est : 0,08 à 3,2 g/s.

La mesure du débit est certes celle qui est la plus délicate et la précision est limitée par celle du compteur d'étalonnage.

La mesure des pressions d'arrêt pour chaque ajutage a été faite le plus près possible de la sortie de manière à ne pas introduire dans les résultats des erreurs dues aux pertes de charge dans les canalisations ou les coudes d'alimentation. Nous avons donc ménagé une chambre dans laquelle nous avons diminué suffisamment la vitesse et où nous avons mesuré la pression statique. Nous avons corrigé cette pression pour trouver la pression d'arrêt en tenant compte du terme dynamique et de la compressibilité.

Nous obtenons pour un écoulement isentropique :

$$\frac{\sqrt{1-\left(\frac{P_s}{P_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}{\sqrt{1-\left(\frac{P_i}{P_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}} \cdot \left(\frac{P_s}{P_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{A_s}{A_i} = 1$$

où les conditions i et s sont celles de la chambre de mesure et de la sortie de la buse, A est la section et P_o la pression d'arrêt.

En considérant $P_o - P_i$ petit devant P_o il vient :

$$\frac{P_o - P_i}{P_o - P_s} = \frac{\gamma/2\ M^2}{\left(1-\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \cdot \left(\frac{A_s}{A_i}\right)^2$$

La formule montre que l'erreur relative lorsqu'on assimile la pression statique de la chambre à la pression d'arrêt, dépend du nombre de Mach. On voit figure 26 que cette erreur est égale au rapport du carré des sections lorsque le nombre de Mach est négligeable et qu'elle baisse lorsque M augmente.

Nous avons fait la correction dans toutes nos expériences. Ceci est nécessaire par exemple lorsque A_s / A_i est égal à 5. L'erreur

peut alors atteindre 4%.

Le calcul de la masse volumique a été fait en tenant compte qu'entre le point de mesure de température et la sortie, l'écoulement était isentropique. L'erreur commise vient donc en partie de la température et en partie de la pression.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta P}{P}$$

Comme T est voisin de 280, 290° k et que la pression de la sonde est de 1° k, $\left|\frac{\Delta T}{T}\right| < 0,36\ \%$.

D'autre part, p est toujours compris entre 1 bar (pression atmosphérique) et 2 bars (pression absolue maximale à laquelle nous ayons travaillé).

Δp est fonction du liquide utilisé ; pour le mercure on peut prendre $\Delta p \leqslant 1$ mm Hg et $\left|\frac{\Delta P}{P}\right| < 0,13\ \%$. Si c'est de l'eau $\Delta p \leqslant$ 1mm CE et $\left|\frac{\Delta P}{P}\right| < 0,1\ ‰$. Ce qui veut dire que l'erreur relative que l'on peut commettre sur la masse volumique est inférieure à 0,5 %.

III. 3. MESURE DES PRESSIONS DYNAMIQUES

La sonde de pression dynamique utilisée est montrée figure 24. Elle est constituée par une aiguille hypodermique de 4/10 de millimètre extérieurs et 2/10 intérieurs. Elle est soudée à plusieurs tubes concentriques qui constituent son armature, de sorte que pendant la mesure elle ne vibre pas. Elle est longue de 15 cm et elle est reliée à un capteur de pression dont la linéarité est inférieure à 1 %.

On pourra convertir la pression dynamique obtenue en vitesse aux conditions suivantes :

- possibilité d'assimiler la pression statique à la pression atmosphérique (nous verrons que cela est vrai hors du corps potentiel).

- possibilité de négliger $\rho \overline{u'^2}$. Ce qui n'est pas toujours le cas, car dans certaines zones $\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u}$ peut atteindre 4 %.

III. 4. MESURE DES VITESSES

Le matériel le plus pratique que nous ayons utilisé pour la mesure des vitesses est l'anémomètre à fil chaud. La résistance d'un fil très fin (5/µm) est fonction de sa température. Lorsqu'on place ce fil dans un écoulement, l'échange thermique entre ce fil et le milieu dépend de la différence de température et de la vitesse. Si la vitesse augmente, la température de la sonde diminue et sa résistance aussi. Le pont de Wheatstone, dont la sonde constitue une branche, est déséquilibré et la tension de déséquilibre est amplifiée pour alimenter le pont, de sorte que l'intensité augmente à nouveau dans la sonde jusqu'à ce que le pont soit équilibré.

La relation fournie par la loi de King entre la vitesse u et la tension V est de la forme :

$$V^2 = c(a + b\sqrt{u})$$

où a, b, c, sont des paramètres qui dépendent de la conductivité du fluide, de la température du fil et de celle du milieu. Si l'on porte la sonde à une température assez élevée, la variation de température du milieu (de quelques degrés) peut être considérée comme négligeable devant celle du fil. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté des coefficients de surchauffe élevés, quite à limiter la durée de vie de ces sondes.

On constate que sous la forme indiquée plus haut, la relation entre V et u est difficilement exploitable pour faire des enregistrements. D'autre part, si $\frac{dV}{du}$ est très grand aux faibles vitesses il n'en est pas de même pour les vitesses élevées.

Aussi nous avons adopté la solution que propose le constructeur

qui est de linéariser la fonction $V(u)$. L'inconvénient de l'emploi de cet appareil est le réajustement fréquent que l'on doit faire. Si cette précaution est respectée, on peut disposer d'une valeur correcte. Nous avons porté, figure 27, les courbes d'étalonnage et figure 28 l'écart par rapport à la valeur moyenne. On constate sur cette dernière figure que le défaut de linéarité est inférieur à 1 %.

III. 5. SOURCE D'ERREUR DANS LA MESURE DE u

Lorsque l'on met une sonde dynamique dans un écoulement dont le vecteur vitesse fait un angle θ avec la sonde, on introduit une erreur lorsque la sonde n'est pas directionnelle. C'est le cas pour le fil chaud et pour la sonde dynamique.

III. 5. 1. Sonde à fil chaud

Le fil chaud utilisé mesurait 1 mm et ne pouvait être placé que perpendiculairement au plan Oxy . Dans ces conditions il n'est pas directionnel et la composante w étant nulle, il est sensible à $\sqrt{u^2+v^2}$
Or dans nos expériences nous avons assimilé u à $\sqrt{u^2+v^2}$ ce qui peut paraître une erreur assez grossière.

Pour justifier cette simplification, nous allons supposer à priori que le profil de Goertler est valable et que l'équation 17 est vérifiée.

$$tg\,\theta = \frac{v}{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\eta - \frac{sh\,2\eta}{4}\right]$$

$\frac{v}{u}$ est maximum pour $ch\,2\eta = 2$ soit $\eta = 0,66$

Pour cette valeur :

$$\left[\frac{v}{u}\right]_{max} = \frac{0,23}{\sqrt{2}}$$

En prenant pour ∇ la valeur proposée de 7,67 on trouve :

$$\left[tg\theta\right]_{max} = 0,03 \text{ ce qui correspond à un angle } \theta_{max} = 1°43'.$$

L'erreur commise en ce point sera donc :

$$\frac{V-u}{u} = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{u^2}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\frac{v}{u} = 1,5\ \%$$

Cette erreur, si elle n'est pas négligeable, n'est pas toutefois considérable et elle est compatible avec la précision des appareils de mesure.

Calculons l'erreur au point remarquable η_c que nous utiliserons par la suite.

η_c est le point tel que $f(\eta_c) = \frac{1}{2}$. Pour l'équation $\frac{u(x,y)}{u(x)} = (1-th^2\eta)$, $\eta_c = 0,88$. L'erreur commise en ce point est inférieure à 1,2 %. On commettra donc pour le relevé expérimental de η_c une erreur systématique.

Il faut remarquer de plus que lorsque le jet est dévié, la vitesse v est beaucoup plus importante. Cependant, le relevé des vitesses dans ce cas sera utilisé surtout pour déterminer l'angle de déviation de l'axe du jet.

III. 5. 2. Sonde de pression dynamique

La sonde de pression dynamique est légèrement sensible à θ . Soit P la pression dynamique correspondant à la vitesse V .

P et V sont liés par :

$$\sqrt{\frac{2P}{\rho}} = V$$

comme $u = V\cos\theta$

$$u = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \cdot \cos\theta$$

Par conséquent la valeur $P(\theta)$ indiquée par la sonde doit être aussi voisine que possible de $P_i \cos^2\theta$. La figure 29 donne la valeur $\frac{P_i\theta}{P_i(0)}$ en fonction de θ ; nous voyons que les courbes résultantes sont encadrées par la courbe $\cos\theta$ et $\cos^2\theta$.

L'erreur introduite par la sonde dynamique est plus faible que celle qu'introduit l'anémomètre ; de plus, le terme $\rho\overline{u'^2}$ n'est pas négligé lors de la mesure. Cependant celui-ci est négligé si nous voulons déduire la vitesse des valeurs mesurées.

III. 6. ETUDE DU JET ET DES PARAMETRES DE L'ECOULEMENT

La figure 30 représente la maquette utilisée pour effectuer les essais sur le jet libre et sur l'intéraction des jets.

La buse d'alimentation est à convergence brusque pour éliminer le plus possible la couche limite à la sortie et pour obtenir un profil aussi droit que possible. D'autre part, la nécessité de monter des alimentations perpendiculaires au plan de l'écoulement, nous a contraint à adopter un canal de repos assez long. Dans ce canal, la vitesse est environ dix fois plus faible que dans la buse (le rapport des sections est de 10). Comme nous avons fixé dans nos essais la vitesse à 60 m/s environ, la vitesse à l'intérieur du canal est de l'ordre de 6 m/s environ. Nous pensons ainsi avoir diminué l'influence du changement de direction.

La figure 31 donne la valeur moyenne du coefficient de débit de la buse d'alimentation . La vitesse à la sortie a été calculée à l'aide de la formule de Saint Venant en tenant compte de la pression statique dans le corps portentiel à la section de sortie. Nous avons trouvé pour valeur moyenne des mesures 0,99 qui représente une bonne répartition des vitesses et une couche limite très faible.

D'autre part, la figure 32 montre la répartition des vitesses enregistrée dans le sens Oz sur l'axe de symétrie de la buse, en mettant la maquette sur le flanc. On remarque que dans ce sens la répartition est uniforme, et il n'y a aucune dissymétrie .

La section des canaux de commande décroît de manière plus progressive que celle du canal d'alimentation. Nous verrons d'ailleurs que le profil des vitesses n'y est pas aussi droit que nous l'aurions désiré. Ceci est dû à la présence nécessaire de l'évent pour certaines de nos expériences. Cet évent doit se trouver dans une zone où la pression statique est faible de manière à ne pas diminuer l'énergie de la commande. Nous avons donc essayé de profiler les parois de la commande et de l'évent de manière que l'énergie envoyée par le canal de contrôle ne sorte pas par l'évent.

Nous avons fait figurer d'autre part sur ce croquis les trois positions de l'arête du canal de commande, correspondant aux trois valeurs du paramètre E_c .

III. 6. 1. Etude du profil $u(x,y)/U(x)$

Nous avons fait un enregistrement figure 33, d'où nous avons pu extraire un certain nombre de renseignements essentiels, concernant l'écoulement sans pression de commande. (Le décalage sur la figure des profils est volontaire et a été fait dans le but de pouvoir lire commodément les résultats).

Ces expériences concernant le jet libre ont été faites dans le cas de l'écoulement plan par Reichardt (réf. I.2.) ; nous avons voulu refaire ces essais pour savoir si les parois latérales restreignaient la solution. Il faut noter en effet que le rapport de forme $\frac{H}{L_S}$ (hauteur entre paroi sur largeur de la buse) est de 3 dans nos expériences.

D'autre part, la caractéristique extérieure de la buse, en particulier la géométrie des commandes peut influer sur certains paramètres :

nous rappelons en effet que l'on trouve dans les jets circulaires des différences entre les jets de mur et les jets de buse.

Ces justifications faites, nous étudierons successivement le profil unique $f(\eta)$, le profil en long $U(x)$ et la largeur de mélange du jet.

De l'enregistrement 33, nous avons déduit les points portés sur la fig. 34, où $U(x)$ est la vitesse axiale et $y(c)$ un point de comparaison. Pour faire une affinité sur l'axe Oy et superposer les profils, on doit en effet faire passer toutes les courbes par un point. Nous avons choisi arbitrairement le point y_c tel que pour $y = y_c$, $u(x,y) = \frac{1}{2} U(x)$. Ce point a l'avantage d'être central et de permettre de superposer les points expérimentaux sur un vaste domaine.

Nous avons porté figure 34 les courbes de Goertler et de Reichardt en comparaison avec les points expérimentaux.

Nous constatons tout d'abord que pour $x/L_s = 4$ le profil expérimental semble assez éloigné des autres profils. Pour tous les autres points par contre, on peut supposer que la solution du profil unique est largement justifiée.

D'autre part la coïncidence avec le profil en $\mathrm{th}\,\eta$ est particulièrement bonne et meilleure que les résultats de Reichardt (réf. I. 2.) qui trouve que pour les faibles vitesses le profil de Goertler est au-dessus des points expérimentaux et coïncident bien lorsque $u/U > 1/2$.

Le profil en $e^{-\eta^2/4}$ par contre donne une valeur inférieure à l'expérience pour $u(x,y)/U(x) < 0,5$ et supérieure pour $u(x,y)/U(x) > 0,5$

Le profil $x/L_s = 4$ se trouve dans ce que nous avons défini comme étant la région I. La littérature donne généralement comme limite de cette région la valeur $x/L_s = 5$. On constate que c'est bien entre le

profil 4 et le profil 6 que se fait la transition et que l'équation $f(\eta)$ peut être adoptée à partir de $x/L_s = 6$.

On discutera par la suite de la solution que nous avons proposée.

III.6,2. Etude du profil $U(x)/U(s)$

A partir des résultats de l'enregistrement 33, on a porté figure 35 le rapport $U(x)/U_s$ qui correspond à un fonctionnement sans évent.

a. Caractéristiques lorsque l'évent est bouché

Nous considérerons sur la figure 35 les points expérimentaux et la courbe asymptote.

Cette asymptote a été calculée à partir de l'équation (24') qui donne la relation entre $U(x)$ et x à l'aval. On a ajusté expérimentalement la valeur de C et nous l'avons trouvée égale à 5.

On remarque tout d'abord que au-dessous de $x/L_s = 12$ l'asymptote s'éloigne très vite des points expérimentaux et la solution proposée ne peut être retenue pour les points du domaine (0 , 12). Ce point nous permet de définir arbitrairement la borne de la région III.

Dans la région I d'autre part, la vitesse augmente pour diminuer ensuite. Ce phénomène est dû à la pression statique à la sortie de la buse. On remarque en effet que cette pression n'est pas nulle et qu'elle augmente avec la pression d'alimentation (figure 36), de sorte que le rapport est voisin de 0,06. La valeur de cette pression n'est pas la même pour toutes les buses. Elle dépend de leurs profils intérieur et extérieur.

Elle évolue avec l'abscisse dans le corps potentiel et diminue constamment, ce qui correspond bien à une faible détente du jet à la sortie. La pression totale reste la même, de sorte que la vitesse augmente. Le

maximum de vitesse se situe au voisinage de $x/L_s = 3$, après ce point la courbe est décroisaante. Cela correspond à une diminution de la pression totale. Nous pouvons donc situer la limite de la zone I près de la valeur 4 qui correspond à $U(x) = U_s$. Il faut remarquer toutefois que ce rapport dépend de la valeur prise pour U_s . En effet, la valeur indiquée par l'anémomètre dans l'axe de la buse au point $x = 0$ est légèrement inférieure à celle que l'on calcule à l'aide des valeurs de pression. Cela est dû au creu qui existe dans le profil des vitesses à l'origine, comme nous le verrons par la suite.

Lorsque nous ajustons les coefficients de l'asymptote pour qu'elle coïncide avec les résultats expérimentaux, nous tenons compte de l'abscisse du pôle x_o . Cela revient à dire que pour déterminer l'asymptote, il faut déterminer deux coefficients. Nous avons trouvé que dans ce cas l'abscisse du pôle était :

$$x_o/L_s = 2,9$$

Nous avons été tout d'abord fort étonnés de constater la grande divergence qui existe entre ce résultat et celui qui figure dans l'ouvrage d'Abramovitch (réf. 2) et qui donne une valeur faiblement négative pour x_o/L_s . Lorsque nous étudierons l'ajutage de puissance dans la deuxième partie, nous verrons que x_o/L_s peut être encore plus élevé.

Nous pensons que la position du pôle est liée à la pression statique, à la sortie de la buse et dans le corps potentiel. Nous avons utilisé un ajutage à forte courbure pour une mise en vitesse aussi bonne que possible. Si on suppose qu'à la sortie les filets fluides ne sont pas parallèles, mais légèrement convergents, on peut expliquer qu'il y ait une faible compression du fluide ; d'autre part le jet ne s'étendra pas de la même manière qu'un jet dans lequel les filets fluides, à la sortie, sont parallèles. Le pôle du jet correspondrait alors pratiquement au point où la vitesse est maximum, c'est à dire le point où Δp est maximum.

Comme la pression totale est pratiquement constante dans le corps potentiel, (nous le mettrons en évidence dans la deuxième partie), c'est en ce point que la pression statique s'annule. Dans le domaine $0 < \frac{x}{L_s} < 3$ il y a donc une détente du jet dans le sens de la largeur et le pôle est ainsi déplacé vers l'avant.

b. Caractéristiques avec l'évent ouvert

La figure 37 montre un relevé expérimental lorsque l'évent est ouvert. On constate une différence sensible avec les expériences précédentes. La vitesse $U(x)$ est plus grande en tous points du plan et nous remarquons que la nouvelle courbe est légèrement déplacée vers l'avant. En fait, c'est le pôle qui est déplacé vers l'avant. La pression statique à la sortie de la buse a légèrement augmenté, ce qui donne pour le rapport $P_s / P_{t,s}$ la valeur 7,6 % contre 7,4 % évent bouché. Cette remarque confirme l'hypothèse précédente sur la position du pôle.

Le long du jet une certaine quantité du fluide est entraîné et tout particulièrement à la sortie de la buse où les gradients latéraux de vitesse sont très importants. La courbure des filets du fluide entraîné dépend de la géométrie extérieure. En effet, pour un jet de mur, le changement de direction est de 90°, la vitesse étant pour y/L_s grand parallèle au mur, pour prendre ensuite la direction générale de l'écoulement. Dans le cas du jet de buse, c'est le contraire car les filets sont toujours parallèles à l'écoulement principal. Lorsque l'évent est ouvert nous nous rapprochons du jet de buse; lorsqu'il est fermé, du jet de mur.

Nous avons mis en évidence l'influence de la géométrie extérieure sur l'écoulement. Il faut préciser à cet égard que ce sont des paramètres dont il est difficile, voire pratiquement impossible, de tenir compte pour la mise en équation.

III. 6. 3. Etude de la largeur de mélange

Il est difficile de définir la largeur du jet car le profil étant asymptotique, on est obligé de se fixer un point y pour lequel la vitesse représente un pourcentage très faible de la vitesse axiale. Comme les valeurs que l'on définira seront des valeurs conventionnelles, nous ferons appel à y_c , que nous avons déjà utilisé. A la sortie de l'ajutage y_c est égal à 0,5 L_s et croît avec l'abscisse.

Nous avons porté figure 38, les relevés expérimentaux extraits de l'enregistrement 33. On remarque que la variation de y_c/L_s devient pour x/L_s grand, fonction linéaire de x/L_s . Comme à partir de $x/L_s = 6$, nous avons vu que le profil unique était valable, la valeur de y_c est en relation directe avec la largeur de mélange. Par conséquent l'hypothèse selon laquelle ce paramètre est proportionnel à l'abscisse est bien exacte.

On remarque que l'on peut tracer une droite asymptote passant par la valeur définie [illegible] : pour l'abscisse du pôle. Ceci confirme bien la position du pôle à l'aval de la buse.

Nous avons défini précédemment la limite inférieure de la région III à l'abscisse $x/L_s = 12$. On constate que sur cette figure c'est à partir de cette valeur que la différence entre les points expérimentaux et la droite asymptote devient faible.

En définissant les coefficients de l'asymptote on définit aussi la valeur du coefficient α ; nous avons trouvé :

$$\alpha = 0,107$$

III. 6. 4. Bilan de quantité de mouvement

Il nous reste maintenant à définir le coefficient : k_1 . Cc paramètre se déduit de la connaissance de y_c et de $U(x)$ à condition que le profil unique soit valable. Nous pourrons donc définir à partir de

$x/L_s = 6$ la quantité de mouvement du jet, en remarquant que :

$$\eta = \frac{y}{ax} \qquad \text{et que}$$

$$\eta/\eta_c = y/y_c$$

Pour les profils expérimentaux on peut définir arbitrairement $\eta_c = 1$, ce qui donne :

$$y_c = ax$$

Ceci étant vrai dans la zone établie. Mais si l'équation ci-dessus n'est pas vérifiée, on peut toujours poser :

$$\eta = \eta_0 \frac{y}{y_c}$$

où η_c est toujours pris égal à 1 et où y_c est une fonction de x .

Cela n'entraîne aucune restriction à l'équation (24'). Posons en effet :

$$u(x,y) = U(x) \cdot f\left(\frac{y}{y_c(x)}\right)$$

Si nous posons que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,y)\, dy = K_1(x) \cdot U_s^2 \cdot L_s$$

Il vient :

$$2\, U^2(x) \cdot y_c(x) \cdot \int_0^{\infty} f^2\, d\eta = U_s^2 \cdot L_s \cdot K_1(x)$$

Comme le profil est unique, l'intégrale $\int_0^{\infty} f^2\, d\eta$ a une valeur indépendante de x . La quantité de mouvement par unité de masse volumique $\frac{J(x)}{\rho}$ est une fonction de x et le rapport $J(x)/J(0)$ est égal à K_1 ou encore à :

$$K_1(x) = \left[\frac{U(x)}{U_s}\right]^2 \frac{y_c(x)}{L_s} \cdot 2 \int_0^{\infty} f^2\, d\eta$$

Puisque les deux premières quantités du second membre ont été déterminées, il ne reste plus qu'à trouver $\int_0^\infty f^2 d\eta$. Nous avons calculé la valeur de cette intégrale par planimètrage. Nous obtenons :

$$\int_0^\infty f^2 d\eta = 0{,}740$$

Nous portons figure 39 les points homogènes à la quantité de mouvement Nous supposons naturellement que $\rho \overline{u'^2}$ est négligeable. Nous remarquons que $J(x) / J(0)$ décroît dans le corps et dans la région II et se stabilise par la suite à une valeur égale à 80 %. Nous voyons donc qu'il y a entre la buse et l'aval une perte de quantité de mouvement de 20 %.

Cette perte correspond d'une part à l'apparition ou à l'augmentation de la turbulence dans la région de mélange, d'autre part à des tourbillons qui prennent naissance dans la zone de mélange de la région I et mis en évidence par Fonade (réf. 3). Le terme $\sqrt{\rho \overline{u'^2}}$ qui a été mesuré, en particulier par Abramovitch (réf. 2) est représenté sur la figure 40. On peut calculer par planimètrage la contribution de $\frac{1}{\eta_c}\int_0^\infty \rho\left[\frac{\overline{u'}}{u(x)}\right]^2 d\eta$ et la comparer à $\frac{1}{\eta_c}\cdot\int_0^\infty f^2 d\eta$. La première intégrale est égale à 0,1 et le rapport de la première à la seconde est égal à 13,5 %, ce qui indique que $\rho \overline{u'^2}$ n'est pas négligeable. Nous pensons aussi que dans les zones du corps potentiel les pertes par frottement sont assez importantes car les gradients de vitesse sont grands.

Nous nous trouvons de plus, dans nos expériences, dans un cas différent de l'écoulement plan, car le frottement sur les parois ne peut être considéré comme négligeable.

III. 6. 5. Discussion sur les valeurs des paramètres

Nous venons de définir quatre paramètres que nous utiliserons par la suite : x_0 , α, c , k_1 . Examinons maintenant quelques expressions remarquables et caractéristiques. Dans la région III les expressions

qui suivent ont pour valeurs respectives :

	Expérience	$(1-th^2\eta)$	$e^{-\eta^2/4}$
η_c	1	$\log(\sqrt{2}+1) = 0,881$	$2\sqrt{\log 2} = 1,665$
$\frac{1}{\eta_c}\int_0^\infty f.d\eta$	1,072	$\frac{1}{\log(\sqrt{2}+1)} = 1,135$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\log 2}} = 1,064$
$\frac{1}{\eta_c}\int_0^\infty f^2.d\eta$	0,740	$\frac{2}{3\log(\sqrt{2}+1)} = 0,757$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\log 2}} = 0,753$
$-\eta_c f'(\eta_c)$	0,633	$\frac{1}{\sqrt{2}.\log(\sqrt{2}+1)} = 0,622$	$\sqrt{\log 2} = 0,693$

Le premier paramètre du tableau dépend du profil considéré et il n'est pas nécessaire qu'ils soient égaux ou voisins dans les trois cas.

Le deuxième paramètre intervient dans le calcul du débit de fluide à travers une section droite. La correspondance est bonne entre l'expérience et $e^{-\eta^2/4}$.

Le troisième paramètre intervient dans le calcul de la quantité de mouvement et on voit que la différence entre les profils $(1-th^2\eta)$ et $e^{-\eta^2/4}$ est faible.

La quantité $\eta_c.f'(\eta_c)$ intervient dans le calcul du gradient $\frac{\partial u}{\partial y}$ de vitesse au point $y = y_c$. En effet :

$$-\frac{\partial u}{\partial y}_{(y=y_c)} = \frac{U(x)}{y_c(x)}.\eta_c.f'(\eta_c)$$

La courbe $(1-th^2\eta)$ est proche des résultats expérimentaux pour le cas de ce paramètre.

Les quantités ainsi définies sont donc représentatives soit du débit soit de la quantité de mouvement, soit du gradient de vitesse au point η_c. La comparaison de ces valeurs permet de se faire une idée de l'approximation que représente le profil choisi par rapport à l'expérience, pour le débit, la quantité de mouvement ou le gradient de vitesse au point η_c. Nous voyons en particulier que pour ce dernier cas, l'équation $e^{-\eta^2/4}$ ne représente pas, au voisinage de η_c, convenablement la fonction, le gradient étant trop important par rapport à l'expérience : ce qui confirme la comparaison que nous avons faite sur la figure 34.

III.6.6. Première solution proposée

Dans un premier temps, nous avons utilisé pour représenter le jet dans la zone II et III un lissage des résultats expérimentaux. Pour l'application que nous voulions faire, il n'était pas nécessaire de bâtir une solution théorique. La représentation de la vitesse à l'aval d'un point d'abscisse $\frac{x}{L_s} = 6$ était suffisante.

a. Solution proposée pour $U(x)/U_s$

Nous considérerons la courbe constituée dedeux parties : pour x/L_s grand nous savons que la fonction recherchée doit être asymptote à la fonction déterminée précédemment.

$$x \longrightarrow +\infty \qquad V(x) = U(x)/U_s \longrightarrow \sqrt{\frac{c}{\frac{x-x_0}{L_s}}}$$

Au voisinage du pôle, c'est-à-dire pour $x-x_0$ petit, la fonction considérée doit être aussi proche que possible de 1, ou de la valeur prise par $U(x)$ au pôle.

Si nous écrivons $U(x)$ sous la forme :

$$\frac{U(x)}{U_s} = \frac{1}{h(x) + \frac{1}{V(x)}}$$

où $h(x)$ est la fonction dont on veut déterminer l'équation.

La fonction $h(x)$ doit donc avoir les propriétés suivantes :

$$h(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{pour} \qquad x/L_s \longrightarrow +\infty$$

$h(x)$ doit être en particulier négligeable dès que $x/L_s > 12$

$$h(x) + \frac{1}{\gamma(x)} \quad \text{finie pour} \quad x \longrightarrow x_0$$

Il faut prendre pour $h(x)$ une fonction qui décroisse rapidement et on voit que la forme exponentielle est tout à fait indiquée :

$$h(x) = k_1 \, e^{\frac{k_2 (x - x_0)}{L_s}}$$

Pour calculer k_1 et k_2 on porte :

$$\log\left[h(x)\right] = \log\left[U_s/U(x) - 1/\gamma(x)\right]$$

en prenant comme valeur de U_s / U_x les points expérimentaux (fig. 41). On suppose que l'erreur de mesure de $U(x)/U_s$ est inférieure à 0,5 %. C'est une valeur faible et certainement on a pu commettre des erreurs de l'ordre de 1 % mais cela nous permet de limiter la fourchette pour la détermination des coefficients. Les deux séries de points de la figure correspondent donc à $\frac{U(x)}{U_s} \pm 0,005$. Nous voyons qu'il est possible de faire passer une droite dans la fenêtre réalisée. Les coefficients de l'équation de la droite donnent les valeurs de k_1 et k_2.

Nous avons trouvé :

$$k_1 = 0,8 \qquad k_2 = -0,37$$

ce qui donne pour h :

$$h(x) = 0,8 \, . \, e^{-0,37 \left(\frac{x - x_0}{L_s}\right)}$$

le lissage $U(x)/U_s$ est porté sur la figure 35 :

(47)
$$U(s) / U_s = \frac{1}{0,8 \, e^{-0,37 s} + \sqrt{\frac{5}{3}}}$$

avec

$$S = \frac{x - x_0}{L_s}$$

Cette courbe coïncide bien avec les points expérimentaux et on peut donc utiliser en particulier pour le calcul numérique une expression de la forme de l'équation (47) à condition de déterminer dans chaque cas de buse les coefficients. Nous pensons cependant que le paramètre qui varie le plus avec les conditions géométriques est le pôle du jet.

b. Détermination de $y_c(x)/L_s$

La répartition sur la figure 38 des points expérimentaux suggère une forme hyperbolique pour le lissage. Nous possédons l'équation de l'asymptote pour $x/L_s \to \infty$ et pour les faibles valeurs de x/L_s il suffira de prendre pour asymptote une droite passant par deux points. Nous en connaissons un : il s'agit de l'angle de la buse. L'autre peut être défini par plusieurs essais successifs.

Nous avons trouvé l'équation de l'hyperbole qui constitue le lissage et nous avons déterminé les coefficients de sorte que l'écart entre les points expérimentaux et la courbe soit minimum.

La courbe est de la forme :

$$y_c/L_s = ax + b + \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \delta}$$

et les valeurs des coefficients sont indiqués sur la figure 38.

On constate sur cette figure la bonne correspondance entre le lissage et les relevés de l'expérience. Comme pour la courbe $U(x)$ il faut dire que les valeurs de ces coefficients dépendent aussi de la forme intérieure et extérieure de la buse.

c. Equation du jet avec les résultats précédents

Nous avons complètement défini le jet lorsque nous avons déterminé

les trois équations :

$$U(x)/U_s \quad , \quad y_c(x)/L_s \quad , \quad f(\eta)$$

En effet, (8) devient :

$$(48) \qquad u(x,y) = U_s\left[\frac{U(x)}{U_s}\right] \cdot f\left[\eta_c \cdot \frac{y}{y_c(x)}\right]$$

équation dans laquelle tout est connu. Nous avons vu que nous avions adopté pour $f(\eta)$ le profil de Goertler qui coïncidait mieux avec les résultats expérimentaux.

$$(49) \qquad f(\eta) = 1 - th^2\eta$$

avec

$$\eta = \eta_c \cdot y/y_c(x)$$

$$\eta_c = \log(\sqrt{2}+1)$$

Nous pouvons utiliser cette expression de la vitesse pour des abscisses x/L_s telles que x/L_s appartienne au domaine $[6, +\infty[$.

Nous avons proposé (réf. 4) cette solution pour résoudre les problèmes de gain d'amplificateur proportionnel. En effet, la solution sous forme de lissage est beaucoup plus facile et plus intéressante à traiter numériquement.

III. 6. 7. Comparaison avec la solution théorique proposée

Au chapitre premier, nous avons proposé une méthode permettant de résoudre le problème du jet plan turbulent quelque soit le profil au pôle.

Dans l'équation (33), il faut connaître a, c et la fonction $y(\ell)$.

Mais nous avons vu (figure 39) que la quantité de mouvement n'était

pas constante le long de x . En conséquence, il faut aussi tenir compte globalement de cette quantité de mouvement en supposant que $k_1(x)$ est connu.

Il suffit donc de remplacer, dans l'équation (33), $a.c$ par la valeur indiquée équation (30).

$$u^2(s,y) = \frac{U_s^2 . k_1(s)}{2\int_0^\infty f^2 d\eta} \cdot \int_{\eta-b/2}^{\eta+b/2} g^2(y-\eta_1 as) . f^2(\eta_1) . d\eta_1$$

Si nous adoptons pour f la fonction en th , l'expression devient :

$$(50) \quad u^2(s,y) = \frac{3}{4} . U_s^2 . k_1(s) . \int_{\eta-b/2}^{\eta+b/2} g^2(y-\eta_1 as) . \left[1-th^2\eta_1\right]^2 . d\eta_1$$

équation qui n'est pas intégrable généralement.

Nous avons supposé qu'il n'était pas nécessaire de connaître le profil des vitesses au pôle mais seulement deux caractéristiques de ce profil :

la largeur $y_c(0)$

la vitesse $U(0)$

Avec ces deux paramètres il est possible de formuler la solution générale.

Pour simplifier l'équation (50) nous avons supposé que la vitesse au pôle est uniforme sur une certaine largeur y_1 et que dans la couche limite cette vitesse est une fonction linéaire de l'abscisse (fig. 42a). Il faut s'assurer simplement que la quantité de mouvement est bien égale à: $J(0)$.

Rapportons les ordonnées à la largeur de la buse en posant :

$$Y_0 = \frac{y_0}{L_s} \qquad Y_1 = \frac{y_1}{L_s} \qquad Y_c(0) = \frac{y_c(0)}{L_s}$$

(51)
$$\begin{aligned}
&\text{Si} \quad y \in \left[-y_1 , y_1\right] && U(y) = U(0)\\
&\text{Si} \quad y \in \left[y_1 , y_0\right] && U(y) = U(0)\left[\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\right]\\
&\text{Si} \quad y \in \left[-y_0 , -y_1\right] && U(y) = U(0)\left[\frac{y+y_0}{y_0-y_1}\right]\\
&\text{Si} \quad y \notin \left[-y_0 , y_0\right] && U(y) = 0
\end{aligned}$$

En écrivant que

$$L_s \int_0^{y_0} U^2 dy = 0,5 \frac{J(0)}{\rho} = 0,5\, U_s^2 . L_s . \frac{J(0)}{J_s}$$

la relation devient :

$$\frac{1}{3}\left[\frac{U(0)}{U_s}\right]^2 . \left[2y_1 + y_0\right] = 0,5 \frac{J(0)}{J_s}$$

En vérifiant d'autre part que, lorsque $\frac{U(y)}{U(0)} = 0,5 \quad y = y_c(0)$, valeur imposée par l'hypothèse, nous trouvons la seconde condition :

$$2 y_c(0) = y_0 + y_1$$

La fonction de la figure 42 est complètement définie.

Nous avons porté les résultats obtenus par la résolution de l'équation (50) sur les figures 35, 38 et 42 b.

Sur la figure 35, il apparaît que la solution théorique diffère légèrement des points expérimentaux au voisinage de $x/L_s = 15$; il en est de même pour les résultats portés figure 38. Pour le profil $U(x)$ les valeurs théoriques sont inférieures et pour $y_c(x)$ supérieures aux valeurs expérimentales dans cette zone. Dans l'ensemble, nous pouvons cependant considérer que le profil théorique est représentatif.

Pour la figure 42. b, les profils $x/L_s = 4$ et $x/L_s = 6$ ne sont pas proches des relevés expérimentaux, surtout pour les faibles valeurs de $u(x,y)/U(x)$. L'approximation par un trapèze de la répartition des vitesses au pôle est une des causes de cette divergence.

III. 6. 8. Conclusions sur l'étude du jet libre

Nous avons proposé deux solutions concernant l'écoulement d'un jet : l'une est un lissage et représente avec autant de précision qu'il est possible l'écoulement réel, l'autre est une solution qui nous satisfait davantage car elle est basée sur des considérations moins limitatives que l'expérience et peut être généralisée.

En conclusion, nous pouvons dire que si de nombreux essais sur les jets plans ont été faits, il était nécessaire pour nous de vérifier dans quelle mesure on pouvait employer, pour le milieu confiné entre deux parois, les résultats des écoulements plans. D'autre part, il était absolument nécessaire de définir un certain nombre de paramètres. Nous retiendrons en particulier la forte pente que nous avons enregistrée pour $J(x)$ et la très grande influence de la géométrie choisie sur la position du pôle. Nous verrons dans la seconde partie que ce résultat est fondamental.

La solution théorique proposée ne prétend pas représenter l'écoulement de manière exacte car il est certain que les hypothèses sont nombreusss. Cependant nous avons pu constaterqu'elle donne de l'écoulement une approche intéressante.

III. 7. ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INTERACTION

Pour les besoins de l'amplification fluide, des études ont été faites auparavant sur la déviation d'un jet plan par un autre. Nous citerons une très intéressante étude faite par Powell et Bidgood (réf. 4) dans laquelle les auteurs ont mis en évidence la largeur optimale du canal de commande au point de vue puissance.

Nous essaierons dans notre étude de définir les paramètres qui restent inchangés pendant l'intéraction et de préciser l'effet du débit, de la pression et de la quantité de mouvement dans la position de l'axe du jet.

Nous nous sommes servis de débits et de pressions de commande relativement faibles de manière à avoir de petits angles de déviation et à pouvoir ainsi négliger la composante de la vitesse sur l'axe $O\,y$.

A l'aide de ces essais, nous avons pu déterminer les caractéristiques essentielles et le mécanisme de la déviation.

III. 7. 1. Remarques générales

Nous avons fait plusieurs séries d'enregistrements (figures 43 à 63) pour différentes valeurs de E_c . Nous rappelons à cet effet que E_c est la distance de l'arête de commande à l'axe de la buse.

Les essais peuvent être groupés ainsi :

figures 43 à 48 : $E_c/L_s = 1,7$, sans évent

figures 49 à 57 : $E_c/L_s = 3,3$, sans évent

figures 58 à 63 : $E_c/L_s = 1,7$, avec évent.

La première remarque concerne le jet à la sortie de la buse. Sur les figures 52 à 57 nous avons essayé de placer le fil chaud de la sonde de mesure à 3/10 de millimètre de la sortie de l'ajutage. Les courbes ainsi enregistrées montrent un ventre dans le milieu et une déformation sur les flancs qui dépend de l'écoulement latéral de commande.

Le ventre existe cependant lorsqu'il n'y a pas de débit de commande. Il est dû à la forme même de la buse qui focalise légèrement le jet. D'autre part, la répartition de pression statique latérale n'est pas uniforme et il est normal de supposer que si $\frac{\partial p}{\partial y}$ est nul sur l'axe, ce même gradient est négatif pour $0 < |y| < \frac{L_s}{2}$. De sorte que si la pression totale est uniforme, la vitesse est plus élevée sur les flancs qu'au centre.

Lorsqu'il y a une action d'un débit de commande, nous pouvons supposer qu'au point O' (figure 19. a) il y a augmentation de la

pression statique. En raisonnant en effet sur le schéma de la figure 19. b nous en déduisons que, en O , la vitesse est nulle et que la pression devient égale à la pression totale (théorème de Lagrange). Dans l'écoulement réel il y a aussi augmentation de pression et comme le terme $p/\rho + v^2/2$ reste constant, si p augmente, V diminue et le profil initial se déforme comme l'indique par exemple la figure 63 pour

$\frac{x}{L_s} = 0,1$.

Pour des abscisses plus grandes, cette déformation ne persiste plus. Nous avons relevé trois courbes faites à une même distance x mais pour des pressions de commande variable. Il n'y a pas de différences notables si ce n'est que lorsque P_c augmente, le jet semble s'élargir davantage, ce qui est normal.

A partir des courbes des figures 58 à 67, nous avons porté figure 65, le profil en long de la vitesse, et figure 66 la grandeur y_c Il est difficile de déceler une différence entre les points correspondant à des réglages différents des paramètres du jet latéral. Pour ces deux caractéristiques, nous pouvons dire que la présence d'une faible pression de commande ne modifie pas les grandeurs $U(x)$ et $y_c(x)$ du jet principal.

Ce sera d'ailleurs la conclusion de ces premières remarques : le jet de commande ne modifie pas les paramètres du jet libre à l'aval de la zone d'intéraction. Cela justifie le fait de traiter le problème en deux parties distinctes et nous pourrons ainsi supposer qu'à l'aval, le jet se déplace en bloc.

Avant de parler de la déviation proprement dite, nous voudrions faire une remarque en ce qui concerne la turbulence. Il est impossible avec la table traçante d'observer des fluctuations supérieures à quelques hertz et il n'est donc pas question d'enregistrer la turbulence. Cependant les courbes 43 à 48 montrent sur le flanc du jet qui se trouve du coté de la commande, un bruit plus important que sur l'autre.

S'il est difficile de faire la part de la turbulence, nous pouvons conclure que l'intéraction de deux jets est un élément qui amplifie les fluctuations, spécialement dans le spectre des basses fréquences.

III 7.2. Comportement de l'axe du jet

Le paramètre principal à déterminer est la position de l'axe du jet par rapport à l'axe OX .

A l'aide des enregistrements 43 à 63, nous avons réalisé les courbes des figures 67 et 68. Les droites tracées sont les lignes de maximum de vitesse et Y_M représente l'ordonnée de chacun des points. Ces droites forment un faisceau qui semble partir d'un même lieu (point pivot fictif). Les maxima sont d'ailleurs remarquablement alignés et nous pouvons déterminer l'abscisse du pivot : dans la figure 67 , elle est égale à $0,5 \cdot L_s$ et dans la figure 68 à L_s .

Dans la figure 68, le pivot est situé un peu plus bas et le cas correspond au fonctionnement avec évent de la maquette.

Ces droites nous permettent de déterminer l'angle de l'axe en fonction des caractéristiques de commande et d'alimentation.

Nous avons porté figure 69 la valeur de la tangente de l'angle en fonction du rapport des pressions. Les points ainsi représentés s'alignent parfaitement sur une droite qui passe par zéro et cela pour tous les cas envisagés. Cette droite est au-dessous de la première bissectrice, les mêmes échelles étant adoptées sur les deux axes.

Si les pressions statiques étaient nulles et les vitesses uniformes à la sortie des buses, les quantités de mouvement des jets deviendraient :

$$J_c = \rho U_c^2 . L_s$$

$$J_s = \rho U_s^2 . L_s$$

Comme d'autre part :

$$V = \sqrt{\frac{2P}{\rho}} \quad ..$$

$$J_c = 2 P_c . L_c$$

$$J_s = 2 P_s . L_s$$

les forces de pression étant exclues, la valeur de $tg\,\alpha$ deviendrait :

$$tg\,\alpha = J_c / J_s = \frac{P_c}{P_s} . \frac{L_c}{L_s}$$

et la droite serait la première bissectrice pour les cas où $L_c / L_s = 1$. Il n'en est pas ainsi et en particulier les pressions statiques ne sont pas nulles surtout à la sortie du canal de commande.

III. 7. 3. Influence de la pression statique

Nous avons porté figure 70 les courbes débit-pression des ajutages de commande. Les variables sont rapportées en fait à leur homologue du canal central.

Si Q_s était nul, les points correspondant à des valeurs de E_c différentes, seraient sur une même courbe, L_c gardant la même valeur; et la courbe idéale correspondant à un écoulement uniforme et à une pression statique nulle aurait pour équation :

$$\left(\rho Q_c / \rho Q_s\right)_{th} = \sqrt{\frac{P_c}{P_s}}$$

(en pointillé figure 70).

Mais lors de l'intéraction, il existe une pression dans la zone de rencontre des deux jets, et en particulier près de l'ajutage de commande. Elle est d'autant plus importante que E_c est plus faible et qu'il n'y a pas d'évent.

Ainsi la tangente de l'angle que fait l'axe du jet avec $O\,x$ dépend de E_c . :La figure 71 montre la variation de $tg\,\alpha$ avec Q_c . Dans le cas de l'amplification fluide, ce phénomène est intéressant à noter car

il conditionne l'impédance d'entrée de l'élément, cette impédance étant d'autant plus grande que le rapport Q/P est faible. Il est évident qu'à déviation égale, donc à pression égale, on préférera consommer moins de débit : ce qui entraînera une dépense d'énergie moindre.

Les pressions statiques ont été mesurées dans chaque cas dans l'axe des buses et dans leur section de sortie. Nous avons mesuré l'évolution respective de P_s et de P_c, et nous avons remarqué que P_s augmentait avec la pression de commande (fig. 72 et 73). Il en est de même pour P_c et nous avons mis en évidence la constance des rapports :

$$\frac{P_s - P_{s(o)}}{P_{i,c}} \quad \text{et} \quad \frac{P_c - P_{c(o)}}{P_{i,c}}$$

où $P_{s(o)}$ et $P_{c(o)}$ sont les pressions statiques respectivement d'alimentation et de commande lorsque $P_{i,c} = 0$.

Cette évolution entraîne, lorsque $P_{i,c}$ augmente, une sorte de freinage des débits de commande et d'alimentation. Ainsi, on peut dire qu'elle joue un léger rôle de contre réaction vis à vis d'eux. Sur la figure 73 bis, nous avons porté la variation de Q_s en fonction de $tg\alpha$ ($tg\alpha$ étant une fonction linéaire de $P_{i,c}$) P_s étant maintenu constant. La variation Q_s est assez faible mais le fonctionnement de l'amplificateur changera suivant qu'il sera alimenté à pression constante ou à débit constant. Généralement, il est alimenté à travers une restriction, ce qui entraîne une variation de P_s et de Q_s .

Après avoir déterminé la pression statique, nous devons pour connaitre les forces agissant sur le jet évaluer la quantité de mouvement de chaque jet.

III. 7. 4. Détermination des forces agissant sur le jet

Pour connaître J_c nous avons exploré le profil des vitesses à la sortie du canal de commande . La figure 74 montre les essais effectués

à chaque pression. La géométrie de la buse est à l'origine de cette répartition assymétrique particulière. Quelque soit le débit la forme de la courbe est à peu près la même et nous avons pris une valeur moyenne pour déterminer le coefficient correctif : lorsque l'on prend pour quantité de mouvement $J = \rho Q U$ (U étant la vitesse moyenne) on commet une erreur par défaut en négligeant un terme ; en effet si $u = U(1+\varepsilon)$

$$J_c = \rho Q u \left(1 + \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \varepsilon^2 dx\right)$$

Le terme $\frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \varepsilon^2 dx$ est ici calculé par planimétrage et il est égal à 0,05.

Nous connaissons ainsi la véritable valeur de J_c . Mais la force qui agit sur le jet est égale à la quantité de mouvement du jet de commande augmentée de la différence de forces de pression de part et d'autre du jet . Nous pouvons dire que la déviation est due à deux éléments : énergie cinétique (due au fluide en mouvement dans le canal de commande) et énergie potentielle (due aux forces de pression statique qui s'exercent de chaque coté du jet principal.

Si nous faisons la supposition que P_c s'exerce sur une portion du jet principal égale à la largeur de la buse de commande, le terme résultant sera $P_c \cdot A_c$. La somme des forces projetées sur Ox agissant dans la déviation sera :

$$J_c + A_c \cdot P_c$$

Nous pouvons écrire de même pour le jet principal et poser :

$$J_s + A_s \cdot P_s$$

pour la composante sur Oy .

Nous avons porté figure 75 le rapport de ces composantes en négligeant $A_s \cdot P_s$ devant J_s . Ce rapport est proportionnel à $P_{i,c} / P_{i,s}$ ce qui est normal et la figure 76 montre que :

$$tg\,\alpha = \frac{J_c + A_c \cdot P_c}{J_s}$$

la droite étant la première bissectrice.

Nous comparerons les résultats expérimentaux à l'étude théorique que nous avons faite au chapitre II.

III. 7. 5. Comparaison avec les résultats théoriques

Les éléments que nous examinerons sont les suivants :

- influence de l'angle de déviation sur la variation de débit de la buse principale ;
- influence de la position de l'arête de la commande sur la caractéristique débit pression de cet ajutage ;
- essai de prévision de l'angle de déviation en fonction du rapport des pressions.

a. Variation du débit d'alimentation en fonction de α

De la courbe théorique de la figure 21. c, nous avons tiré la variation du débit d'alimentation en fonction de l'angle. Nous avons vu d'autre part que cette courbe avait une équation très simple.

$$(\rho Q)_s \Big/ (\rho Q)_{s,\alpha=0} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \alpha$$

Ceci étant vrai pour de petits angles, l'équation générale étant :

$$(\rho Q)_s \Big/ (\rho Q)_{s,\alpha=0} = \left[\sqrt{2} - 1\right]^{2\alpha/\pi}$$

D'autre part, nous avons relevé les variations du débit sur la maquette utilisée. Les mesures en fait ont été délicates car les variations sont faibles.

Sur la figure 77. a, les différences entre la théorie et l'expérience

ne sont pas très grandes.

Les résultats théoriques prévoient cependant une influence beaucoup plus importante de l'angle.

b. Influence de la position de l'arête de commande

Les courbes obtenues figure 21. a peuvent être linéarisées pour les angles que nous avons utilisés. Nous avons noté figure 77. b celles qui correspondent aux valeurs $\frac{E_c}{L_s} = 1,7$ et $\frac{E_c}{L_s} = 3,3$. Ce sont les courbes $x_j = -1,2$ et $x_j = -2,8$.

La différence entre ces deux paramètres vient du fait que nous avons mesuré x_j à partir de la paroi de la buse d'alimentation et E_c à partir de son axe.

Les essais expérimentaux portés sur cette même figure représentent le rapport entre le débit avec jet principal et le débit sans alimentation de la buse centrale.

Les prévisions théoriques sont excellentes et $(Q_c)/(Q_c)_0$ varie légèrement avec α . Nous constatons donc que dans les cas explorés l'influence de la position de l'arête est primordiale puisque pour $\frac{E_c}{L_s} = 1,7$, le débit effectif est presque la moitié du débit sans jet d'alimentation.

Les courbes de la figure 21. a nous permettront dans la seconde partie de notre ouvrage de calculer l'impédance d'entrée de l'élément.

Nous pensions cependant trouver dans les deux cas examinés une valeur expérimentale du rapport supérieure à celle donnée par la théorie correspondante. En effet le jet principal provoque un faible entraînement du fluide ambiant et particulièrement de celui qui se trouve

dans les organes de commande. Le point porté figure 70 pour $Q_c = 0$ montre qu'il en est ainsi et une très faible dépression persistait dans la chambre de commande lorsque l'on fermait l'orifice.

c. Déviation en fonction du rapport $P_{i,c}/P_{i,s}$

Les essais expérimentaux de la figure 65 nous ont fourni le coefficient réel $tg\,\alpha \cdot \frac{P_{i,s}}{P_{i,c}} \cdot \frac{L_s}{L_c}$. Nous avons trouvé 0,77. Il est difficile de dissocier les cas pour lesquels $E_c/L_s = 3,3$ et $E_c/L_s = 1,7$. La précision des mesures ne nous permet pas de dire si le coefficient est différent dans les deux cas. Nous pensons que c'est le même et le cas du fonctionnement avec évent semble le prouver.

Les résultats théoriques que nous avons portés figure 21.d montrent deux cas. L'un (courbe 1) où toutes les forces sont prises en compte et l'autre (courbe 2) où l'on a négligé la réaction sur la paroi. Cependant ce dernier cas n'est pas satisfaisant car nous ne trouvons pas une variation $\alpha\left(\frac{P_{ic}}{P_{i,s}}\right)$ linéaire (le coefficient n'est pas constant).

La configuration que nous avons utilisée et les résultats expérimentaux que nous avons trouvés nous ont conduit à ne pas négliger la force F_c (réaction de la paroi de la commande sur le jet).

Si nous reprenons les équations de base sous la forme :

$$\frac{J_c}{J_s} = tg\,\alpha\left[\frac{1/m_c^2 + 1}{1/m_s^2 + 1 + 2F_c/J_s}\right]$$

dans laquelle nous avons supprimé la force F_s, nous trouverons une nouvelle expression en tenant compte de F_c;

$$F_c = J_c \left[\frac{1}{m_c \cdot \cos\alpha} - \frac{tg\alpha}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_c^2} \right) \right]$$

$$\text{et } \frac{P_c \cdot L_c}{P_s \cdot L_s} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha (m^2+1)}{\left[(m_c^2+1) - 2\sin\alpha \cdot m_c \right]}$$

où le deuxième terme est fonction de $\alpha(m_s, m_c)$ et de E_c/L_s par m_c

Or pour les petits angles le rapport :

$tg\alpha \cdot \frac{P_s \cdot L_s}{P_c \cdot L_c}$ est constant lorsque α varie :

Et ce rapport est égal à :

$$tg\alpha \cdot \frac{P_s \cdot L_s}{P_c \cdot L_c} = \left[\frac{1+m_c^2}{1+m_s^2} \right]_{\alpha=0}$$

Nous retrouvons la même expression . Les valeurs que prend ce terme pour les cas examinés sont :

$$tg\alpha \cdot \frac{P_s \cdot L_s}{P_c \cdot L_c} = 0,67 \quad \text{pour} \quad E_c = 1,7$$

$$tg\alpha \cdot \frac{P_s \cdot L_s}{P_c \cdot L_c} = 0,905 \quad \text{pour} \quad E_c = 3,3$$

Et la courbe (α) de la figure 21.d montre sa variation avec x_j.

Nous pouvons justifier que l'on peut négliger F_s . Le profil de la buse d'alimentation n'est pas à parois parallèles comme pour la théorie. Il est possible donc que dans ce cas les forces sur les 2 parois courbes

s'équilibrent. Cela équivaudrait à dire qu'une buse à parois parallèles est plus favorable à la déviation.

Mais cela n'explique pas pourquoi nous trouvons une valeur de α plus élevée par rapport à l'expérience dans le cas où $E_c/L_s = 3,3$ et plus faible lorsque $E_c/L_s = 1,7$.

Il est certain que lorsque nous supposons l'écoulement irrotationnel nous faisons une simplification importante. Et plus nous éloignons J de l'axe de la buse, plus la dissipation à la sortie de la buse latérale est grande . Le jet a en effet tendance à s'étendre et sa quantité de mouvement diminue.

Nous considérerons donc dans la suite de l'exposé que $tg\,\alpha . \frac{P_s . L_s}{P_c . L_c}$ peut être considéré constant et égal à 0,77 pour les cas qui nous intéressent.

De l'étude théorique que nous avons faite, il reste que nous pouvons utiliser les valeurs trouvées pour m_c afin d'en déduire les impédances d'entrée des éléments amplificateurs.

III. 8. CONCLUSION

En utilisant les solutions que nous proposons pour le jet plan et la valeur de l'ordonnée du maximum y_M nous connaissons totalement l'équation du jet plan dévié.

En effet, nous pourrons poser :

$$y_M = (x - x_p) . k \frac{P_{i,c}}{P_{i,s}}$$

$$u(x,y) = F(x,\eta)$$

dans laquelle : $\eta = \frac{y - y_m}{a\,x}$

L'application de ces formules nous permettra de connaître le gain d'un amplificateur et nous pensons que nous pourrons aussi l'utiliser pour avoir une meilleure approximation de l'écoulement dans les cas d'attachement à la paroi des jets plans.

REFERENCES DU CHAPITRE III

-:-:-:-:-:-

1. REICHARDT, H.
Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz VDI
Forschungsh (1951)

2. ABRAMOVITCH, G.N.
The theorie of turbulent jets.
MIT Press Cambridge Massachussetts

3. FONADE, C.
Contribution à l'étude de la stabilité et de la dynamique
des jets plans.
Thèse 1970

4. POWEIL, E.A., BIDGOOD
An investigation into the design of a beam deflexion
type of proportionnal amplifiers.
3th Cranfield fluidics Conference - Turin (1968)

DEUXIEME PARTIE

-:-:-:-

APPLICATION AUX AMPLIFICATEURS FLUIDES PROPORTIONNELS

Dans cette partie, nous aborderons à la lumière des résultats précédents, l'application aux amplificateurs proportionnels.

Nous avons défini dans notre introduction les principes essentiels de ces éléments et nous avons fait un choix que nous avons sommairement expliqué.

Mais avant tout essayons de comprendre quels sont les principes fondamentaux qui régissent le fonctionnement de ces appareils et quelles sont les applications possibles.

L'amplificateur utilise la puissance d'un jet alimenté sous une pression qui peut aller de quelques millibars jusqu'à plusieurs bars. Nous avons dit aussi que ce jet était dévié par des jets de plus faibles puissance appelés jets de commande et récupéré différentiellement par deux récepteurs. Il est évident qu'il y a une amplification soit dans la pression, soit dans le débit, soit dans la puissance.

Cet élément peut prendre place dans certaines applications et nous le situons entre le distributeur classique à tiroir et le transistor ou la lampe en électronique.

Du distributeur, il évite l'inconvénient de l'inertie du tiroir qui limite les temps de réponse. Il n'a pas non plus les dimensions souvent importantes de celui-ci. Cependant si l'amplificateur fluide proportionnel semble prédestiné aux signaux de faible puissance ; le distributeur est capable d'amplifier des puissances importantes. Nous pensons d'ailleurs que ces deux organes sont complémentaires : mais dans l'avenir les circuits fluides alimentés avec un fluide hydraulique seront capables de fournir eux aussi de fortes puissances.

Au point de vue consommation, ces deux éléments présentent des

différences essentielles : au repos le distributeur ne consomme pas puisque les orifices sont fermés ; par contre, l'amplificateur fluide consomme en permanence la même énergie et le débit d'alimentation peut être comparé à l'intensité de chauffage du filament d'une lampe.

A ce sujet le transistor agit beaucoup plus comme le distributeur et la commande de ces derniers peut être comparée à une porte que l'on ouvre plus ou moins pour laisser passer le débit, alors que dans les éléments qui nous préoccupent, la commande ressemble à un aiguillage qui fait passer le courant d'un coté ou de l'autre.

D'ailleurs, si nous avons comparé les circuits fluides aux éléments de l'électronique c'est dans un esprit de tradition car il est certain que ceux ci ont atteint un haut degré de perfection dans la miniaturisation et les performances. Les temps de réponse sont en particulier largement à l'avantage de ceux-ci.

Cependant si l'on part de considération utilitaire, la fluidique peut rendre de grands services et peut résoudre harmonieusement certains problèmes dans des cas appropriés.

En particulier, les applications dans lesquelles une transformation d'énergie est nécessaire soulève des difficultés en électronique : les capteurs sont des organes souvent plus coûteux et plus délicats que les amplificateurs. Dans les cas de régulation d'un fluide (pression, débit), la fluidique utilise le fluide lui-même dans ses circuits et aucune transformation n'est nécessaire.

Caractéristiques des amplificateurs propotionnels

Un amplificateur fluide est caractérisé par divers paramètres qui sont semblables à ceux que l'on utilise en électronique :

1). Les caractéristiques de transfert qui lient les paramètres de sortie (pression, débit) aux paramètres d'entrée (pression, débit) ;

2). Les caractéristiques d'entrée qui lient la pression d'entrée au débit ;

3). Les caractéristiques de sortie qui lient entre eux le débit et la pression de sortie ;

4). La consommation.

Les éléments que l'on utilise doivent avoir des performances adaptées aux applications ; dans certains cas, il est utile d'avoir un amplificateur de puissance, dans d'autres de pression ou de débit.

Il est donc possible de trouver des dimensions optimales à chaque type. En particulier, les fabricants d'éléments ont mis sur le marché des appareils à grands gains en pression (jusqu'à 10 000). Nous passerons en revue chaque caractéristique pour dégager des principes de base.

Avant d'aborder l'étude théorique appliquée au performances, nous essaierons de définir quelles sont les géomètries de buse d'alimentation et de commandes qui peuvent être favorables à de hautes performances.

Nous donnerons ensuite un aperçu sommaire sur les principales difficultés qui se posent au sujet des récepteurs. Nous n'avons pas fait une étude approfondie car les inconvénients qui sont rencontrés sont du ressort de la stabilité des jets. Nous renvoyons à cet effet le lecteur aux travaux de Fonade (réf. 1).

Nous essaierons ensuite d'appliquer nos résultats précédents au calcul prévisionnel des performances en mettant en évidence la part que prend chaque paramètre dans leur amélioration.

CHAPITRE IV

- :-

ETUDE DE LA BUSE D'ALIMENTATION

La buse d'alimentation est un des éléments les plus importants dans les circuits à fluide ; cependant les performances exigées d'elle ne sont pas forcément les mêmes pour les circuits logiques et pour les circuits analogiques.

Dans les amplificateurs proportionnels le jet à la sortie de cette buse détermine leurs qualités ou leurs défauts.

Sans faire de considérations théoriques, il est évident que l'on cherchera à avoir un jet aussi peu étendu que possible à l'aval, et une vitesse axiale la plus élevée possible. Ces deux caractéristiques étant liées l'une à l'autre (voir équation 13). Ceci sera une conséquence du profil initial du jet et aussi de la répartition au pôle.

La méthode de calcul du profil des vitesses à la sortie de la buse a été proposée déjà par Virto (réf. 2), par Williams et Smétana (réf. 3). Les résultats portent sur le calcul de la couche limite qui intervient directement dans la forme de la vitesse $u(o, y)$.

IV. 1. Influence de la couche limite sur l'écoulement

Pour mettre en évidence l'effet de couche limite, nous avons

réalisé différentes géométries de buses.

L'une est à parois parallèles et à canal long, une autre à parois convergeant rectilinéairement, la dernière à convergence brusque. La largeur de la chambre est égale à cinq fois la largeur de l'ajutage.

Nous avons réalisé à l'aide d'une prise de pression totale (fig. 24) les trois enregistrements de la figure 79. Il est à remarquer que la pression d'alimentation était assez forte ; sur les figures, 1 cm représente 1 mm.

IV.1.1. Remarques préliminaires

L'enregistrement qui a été fait pour α = 1 mm donne une idée de la répartition des vitesses à la sortie de la buse.

Nous remarquons la dissymétrie du profil de la buse 1. Nous pensons que l'usinage de cette buse est en cause. En effet, lorsque la maquette a été fabriquée, la fraise qui a découpé le canal a travaillé sur un coté en opposition et sur l'autre en concordance. Nous avons remarqué effectivement une différence de rugosité entre les deux parois.

Cependant c'est la longueur du canal qui crée cette couche limite importante. Il est d'ailleurs intéressant de noter que la dissymétrie relevée n'est pas déterminante et les profils suivants sont bien dans l'axe.

Les deux autres buses donnent un profil plus rectangulaire et plus uniforme et la buse 3 est caractérisée par le léger ventre qui se forme au centre du profil. Celui-ci est moins important que dans les buses qui ont été utilisées dans les essais de déviation. Nous retrouvons encore dans ce cas l'effet de courbure du canal.

Sur ce dernier enregistrement, il y a un décalage entre l'axe apparent pour α = 1 mm et l'axe des autres profils. Il est difficile de conclure sur ce point, mais il est fréquent dans les amplificateurs que nous

avons essayé de trouver une différence de pression non nulle à la sortie pour des entrées équilibrées. Sur plusieurs autres modèles essayés, nous avons remarqué ce phénomène alors que la géométrie des buses semblait bonne.

Les figures 80.a et 80.b montrent que les enregistrements du jet à plusieurs cotes Z donnaient des résultats fort différents (ceci est vrai surtout pour la buse n° 2).

En particulier ce n'est pas dans un plan médian que la vitesse est maximum. Dans le sens OZ, si la vitesse n'est pas uniforme, elle n'est certainement pas parabolique.

D'autre part, chaque courbe ne possède pas le même axe de symétrie et il semblerait que le jet vrille ou se déforme.

IV.1.2. Critères de choix d'une géométrie

Parmi les éléments qui permettent de déterminer le choix d'une géométrie, la pression dynamique ou la vitesse axiale jouent un grand rôle.

En effet la récupération sera fonction de cette pression axiale et de la largeur des récepteurs.

Nous rapporterons donc les abscisses à la largeur de la buse d'alimentation, ce qui permettra de tenir compte du facteur d'échelle.

La figure 81 montre les profils en long comparés des trois buses précédentes. Pour une abscisse déterminée, la buse qui donne la pression axiale maximum est la buse 1, ce à quoi nous devions nous attendre puisque les pressions sont rapportées à la pression maximum à la sortie de la buse.

Ce critère est très incomplet car il ne tient pas compte de la "raideur du jet". Ce terme indique la difficulté à dévier le jet. En effet

plus la quantité de mouvement du jet sera grande, plus il sera raide.

C'est donc à la quantité de mouvement du jet qu'il faut rapporter la pression axiale $P(x)$. Pour avoir des valeurs adimensionnelles il faut rapporter ce paramètre à $\overline{P}(o)$ qui est la pression moyenne à la sortie de la buse. Ce dernier terme est proportionnel à la quantité de mouvement.

Les courbes de la figure 82 montrent que si le rapport est favorable pour la buse 3, dans l'intervalle qui nous intéresse les écarts entre les trois cas ont diminué par rapport à la figure 81.

Pour éclaircir ce point nous avons utilisé les équations théoriques 50 et 51 du chapitre 3. Pour tenir compte de la vitesse au pôle, nous avons utilisé un profil simplifié en forme de trapèze.

Nous pouvons, sans changer la quantité de mouvement, modifier la forme du profil à volonté. Pour cela nous maintenons Y_o fixe et égal à la demi-largeur de la buse et nous faisons varier $U(o)$, la vitesse maximum. Nous avons porté figure 83, $U(x) / \sqrt{U^2(o)}$ et figure 84 y_c / L_s . La différence entre les deux cas $(U(o) = 1,1$ et $U(o) = 1,2)$ n'est pas très sensible et l'avantage est au profil à forte couche limite.

L'écart relevé vient d'une variation de l'abscisse du pôle du jet. Nous avons vu au chapitre précédent que sa position était fonction des géométries intérieures et extérieures de la buse.

Du point de vue consommation cependant les profils ne sont pas identiques :

Le débit par tranche et par unité de largeur de la buse est donné pour le profil que nous avons considéré pour :

$$Q = U(o)\left[0,25 + \frac{0,75}{U(o)}\right] \quad \ldots$$

Pour ce type de profil lorsque $U_{(o)}$ augmente, Q diminue mais la différence est plus sensible entre une répartition uniforme et une répartition parabolique. Si nous comparons deux profils à quantité de mouvement égales nous trouvons que le profil laminaire donne un débit moindre (environ 9 % de moins). Par contre la pression d'alimentation doit être plus grande dans ce dernier cas (90 % plus élevée). Mais celle-ci ne peut pas être un critère de performance.

Nous retiendrons que le profil parabolique est plus avantageux pour la consommation, alors que le profil uniforme l'est davantage pour la position du pôle.

IV.2. INFLUENCE DU RACCORDEMENT

Il se pose en fluidique un problème qui est particulièrement sensible pour les éléments logiques : il s'agit de la manière de raccorder l'alimentation à l'arrivée du fluide. Les branchements sont généralement droits, ou bien perpendiculaires au plan de la buse.

Le raccord droit ne pose généralement pas de problème car il n'y a pas de changement de direction.

Par contre, il y a des cas où le branchement perpendiculaire est indispensable. Nous pensons en particulier aux amplificateurs à plusieurs étages dans lesquels il est préférable de brancher directement les sorties du premier élément sur les entrées du second sans changement de direction. Cela implique que les alimentations soient perpendiculaires au plan pour qu'il n'y ait pas croisement de canaux.

Nous avons voulu connaître l'influence de ce branchement et en particulier du passage du tube d'alimentation à la chambre de mise en

vitesse. La figure 85 porte les différentes configurations essayées.

Le petit cercle intérieur symbolise la canalisation verticale. La chambre de la première buse est cinq fois plus grande que l'ajutage ; pour les autres elle est de dix fois.

Le critère de jugement sur ces buses sera le même que dans le paragraphe précédent et nous comparerons les pressions axiales (fig. 86) Les valeurs $P(x)$ les plus grandes correspondent dans l'ordre aux configurations 4, 5 et 1, c'est-à-dire aux sections d'alimentation les plus grandes. Entre les branchements 2 et 4, 3 et 5, nous avons relevé une différence très importante

Pour comparer méthodiquement ces courbes, nous avons cherché à connaître le pôle de chaque jet ainsi que le coefficient c qui détermine pour $x/L_s > 12$ la variation axiale de la pression dynamique ou de la vitesse.

De l'équation (13) nous pouvons écrire :

$$\frac{P(x)}{P_{i,s}} = \frac{c.L_s}{x - x_o}$$

qui est vérifiée pour les points de la région III. Nous transformons cette équation en posant :

$$y = \frac{P(x)}{P_i} \cdot \frac{x}{L_s}$$

avec $\mathcal{X} = x/L_s$

$$y = \frac{x_o}{L_s} \cdot \mathcal{X} + c$$

La détermination des coefficients de la droite donne les valeurs cherchées. Nous avons porté figure 87, y en fonction de x pour chaque cas. Les points s'alignent assez régulièrement sur des droites, excepté pour le montage n° 1 pour lequel les valeurs correspondant à $x > 26$ sont assez éloignées de la droite. Nous avons d'ailleurs tracé cette dernière comme les autres, bien que le nombre de points soit insuffisant pour la déterminer.

On obtient ainsi les valeurs suivantes :

Montage	x_0/L_s	C
4	5	5,75
5	4,44	5,68
1	3,91	5,35
2	3,64	5,18
3	1,86	4,93

Les différences entre les montages proviennent donc surtout de la position du pôle. Le coefficient C varie peu en regard de x_0/L_s et la valeur trouvée est à peu près identique à celle qui est indiquée au chapitre III. La différence provient de la configuration extérieure qui se rapproche du jet dit "de buse".

En conclusion nous adopterons le montage 4

IV.3. INFLUENCE DU NOMBRE DE MACH

Nous avons remarqué lors des essais préliminaires que lorsque M variait, les courbes de gain restaient à peu de chose près iden-

tiques. Les résultats (fig. 89) tirés des enregistrements 88, montrent cependant que les courbes $P(x)/P_{i,s}$ sont différentes.

Plus M est grand, plus la pression axiale est importante pour x/L_s inférieur à 20. A partir des points de la figure 89, nous avons, comme dans le paragraphe précédent, cherché les valeurs de x_o/L_s et de C par le calcul des coefficients des droites de la figure 90.

Nous avons trouvé :

$M = 0,27$	$x_o/L_s = 4,2$	$C = 4,25$
$M = 0,37$	$x_o/L_s = 4,2$	$C = 4,25$
$M = 0,52$	$x_o/L_s = 4,5$	$C = 4,38$
$M = 0,78$	$x_o/L_s = 6,0$	$C = 4,00$
$M = 1,04$	$x_o/L_s = 7,63$	$C = 3,58$

Ainsi, lorsque M augmente, le coefficient C diminue (fig. 91). Nous pensons que cela correspond à une perte de quantité de mouvement plus grande.

Nous avons vu en effet (fig. 39) que $J(x)$ variait avec l'abscisse, et la valeur de $k(x)$ dans la zone III détermine C (équation 24'). Lorsque le nombre augmente, il est normal que les frottements sur les parois prennent une importance plus grande. Si l'abscisse du pôle était la même, l'augmentation de M serait défavorable pour la récupération.

Mais x_o/L_s augmente lorsque M croît, dans des proportions considérables. Nous avons porté figure 91 la variation de x_o/L_s avec M et, figure 92, la variation de $P_s/P_{i,s}$. Nous remarquons que les deux courbes ont la même allure.

Cela confirme l'étroite liaison entre la pression statique à la sortie

de la buse et la position du pôle que nous avions mis en évidence au chapitre III.

IV. 4. CONCLUSION SUR LE CHOIX DES BUSES

Dans la réalisation d'éléments proportionnels, une buse à profil uniforme ne sera pas nécessairement la meilleure. Si avec une telle géométrie, la récupération est supérieure, la consommation est aussi plus grande. Nous pensons d'autre part que la déviation est également plus faible car la force f_s que nous avons négligée peut être prise en considération dans une buse à parois parallèles.

L'influence du raccordement sera prépondérante surtout sur la récupération. Par ailleurs nous n'avons pas pris en compte la perte de charge au changement de direction.

Ces résultats peuvent aussi s'appliquer aux buses de commande. Mais dans celles-ci lorsque l'on s'intéresse au gain en pression, il est préférable d'avoir à la sortie un profil uniforme.

IV. 5. REMARQUE SUR LES COMMANDES

Nous avons vu que dans les cas envisagés, l'angle de déviation était fonction du rapport des pressions d'arrêt.

D'autre part, le débit de commande est fonction de la position de l'arête de telle sorte que, lorsque l'on rapproche cette arête de l'axe de la buse d'alimentation, le débit diminue pour une même pression.

Pour faire une analogie avec les circuits électriques on a défini

dans la pratique les impédances comme le rapport entre la pression et le débit.

$$R = \frac{P}{Q}$$

Or les entrées ou les sorties des éléments à fluide sont très rarement linéaires. Généralement la relation qui lie le débit à la pression est de la forme :

$$P = f(Q^2)$$

Nous avons donc adopté pour les impédances d'entrées et de sorties un rapport caractéristique de la forme géométrique.

$\frac{\sqrt{P}}{Q}$ est homogène à une section.

Pour l'entrée nous aurons :

$$Q_c = m . A_c \sqrt{\frac{2(P_{i,c} - P_c)}{\rho}}$$

où m est le coefficient de débit.

Nous avons vu d'autre part dans les études théoriques et expérimentales que le rapport $\frac{Q_c}{A_c\sqrt{\frac{2P_{i,c}}{\rho}}}$ était fonction de la position de J et augmentait légèrement avec α (fig. 21.b et 77.b). Dans le domaine qui nous intéresse (α faible) nous prendrons la valeur pour $\alpha = 0$. La courbe de la figure 93 montre la variation $\sqrt{1 - k_c}$ en fonction de E_c. Cette courbe est issue des résultats de la figure 21.b.

La caractéristique géométrique devient :

$$\frac{\sqrt{P_{i,c}}}{Q_c} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \cdot \frac{1}{h . L_c} \cdot \frac{1}{m\sqrt{1 - k_c}}$$

où m est le coefficient de débit propre de la buse et $\sqrt{1-k_c}$ le coefficient apparent qui est dû à la pression d'alimentation.

En rapprochant la buse de commande nous pouvons réduire notablement le débit d'entrée. Toutefois, au delà d'une certaine valeur, des instabilités apparaissent : le jet principal refoule dans les canaux d'entrée et peut même coller, sous certaines conditions, contre les parois de ces mêmes canaux, tournant ainsi de 90°. Nous avons essayé de réduire au maximum, mais pour $E_c/l_s=1$ nous avons observé les phénomènes ci-dessus.

Dans les amplificateurs essayés pour $E_c = 1,5$, nous avons effectivement remarqué que lorsque nous fermons les évents des commandes, le débit était réduit considérablement et le gain en pression était inchangé.

IV. 6. REMARQUES SUR LES RECEPTEURS

Le problème de la récupération de la pression dynamique du jet est assez difficile, car il se pose des problèmes d'instabilité. Nous avons vu dans nos essais préliminaires que les deux récepteurs accolés étaient d'un rendement nul lorsque leurs sorties étaient bouchées. Les constructeurs d'amplificateurs fluides ont d'ailleurs ménagé un évent central qui améliore les performances.

Malgré cela, l'écoulement est la source d'un bruit acoustique intense qui révèle une instabilité du jet principal.

Nous avons fait quelques expériences de vibration sur la pointe d'une arête, ainsi que des essais sur un récepteur unique placé face au jet principal. La récupération (fig. 94) chute brusquement lorsque $P_{t,s}$ augmente pour une certaine valeur.

Dans un même temps, il se produit un déplacement de la fréquence acoustique fondamentale. Un essai à l'analyseur de bruit a montré que cette fréquence se déplaçait de 1000 Hz à 1800 Hz.

La courbe de la figure 94 indique lorsque ce phénomène se produit, une perte de 20 % dans la récupération. Dans certains cas d'essais d'amplificateurs, nous avons observé un phénomène identique et dans la courbe $\Delta P_r (\Delta P_c)$ il se produit souvent un décrochement qui est dû aux vibrations sur l'un des deux récepteurs.

Des mesures que nous avons faites montrent que les caractéristiques de sortie sont fonction de la pression d'alimentation et de la géométrie du récepteur : en particulier de l'angle que font les parois externes.

Pour comparer ces mesures nous avons adopté un critère de jugement comme dans le cas des buses. L'énergie récupérée par le récepteur est composée d'une pression (énergie potentielle) et d'un débit (énergie cinétique). Nous avons supposé que dans un récepteur sans perte, le terme $p + \rho \frac{v^2}{2}$ devait rester constant. Nous appellerons B le terme :

$$\frac{P_r}{P_{i,s}} + \left(\frac{Q_r}{Q_{i,s}} \cdot \frac{L_s}{L_r} \right)^2 = B(Q_r)$$

Ainsi dans le paramètre B nous définissons les caractéristiques du récepteur pour une distance donnée D.

Si ce terme reste constant le récepteur a un rendement parfait. En général, il décroît rapidement avec Q_r.

Les courbes de la figure 95. a et 95. b montrent que B décroît et ce, d'autant plus vite, que l'éloignement augmente. D'autre part, la chute brusque de $B(Q_r)$ correspond à l'apparition de vibrations.

La figure 96 montre que les courbes varient lorsque la forme change. Nous avons voulu mettre en évidence l'importance de la forme

extérieure du récepteur sur l'écoulement à l'intérieur (θ étant l'angle extérieur des récepteurs).

Les quelques remarques que nous venons de faire montrent que les études dont cet organe doit faire l'objet sont complexes et font appel aux problèmes de stabilité. Pour résoudre les problèmes de vibrations, certaines solutions ont été adoptées. Nous avons indiqué la nécessité de prévoir un évent central si l'on veut que le récepteur tienne la charge. Il faut aussi soit ménager des évents sur les parois parallèles sous la forme d'évidements, soit dégager l'écoulement en supprimant partiellement l'une des parois dans la zone d'influence. Les solutions ont été adoptées sur plusieurs modèles commerciaux.

Pour notre cas, nous avons essayé plusieurs configurations comportant des chicanes pour éviter les vibrations.

Les résultats obtenus sont uniquement qualitatifs et nous ne pouvons consigner ici qu'une impression générale. Dans les géométries favorables à l'élimination des vibrations, la zone d'influence se mettait toujours légèrement en pression.

Cela représente un défaut car le fluide a tendance à sortir par les canaux de commande.

Nous avons donc adopté dans les cas examinés une géométrie dans laquelle nous avons dégagé les flancs des récepteurs par une large entaille dans le couvercle.

Dans la suite de notre étude nous nous proposons d'appliquer aux amplificateurs fluides l'étude d'intéraction en calculant le gain en pression et en débit.

REFERENCES DU CHAPITRE IV

-:-:-:-:-:-

1. FONADE C.

Contribution à l'étude et à la dynamique des jets plans
Thèse 1970

2. DAT, J. et VIRTO, L.

Similitude des amplificateurs fluides - Etude théorique de l'écoulement dans la buse d'alimentation - Influence de la couche limite.
CRAS, tome 268, série A - Janvier 1969

3. WILLIAMS III J.C. et SMETANA F.O.

Theorical study of a convergent nozzle and free jet flow.
H.D.L. (1965)

4. NAUDE C.F.

Low frequency oscillation in proportional amplifiers.
Special summer course in fluid Power Control
July 1966 - M.I.T.

CHAPITRE V

- : -

ETUDE DES AMPLIFICATEURS PROPORTIONNELS

Nous avons indiqué dans une publication la méthode que nous utilisons pour le calcul du gain. Il est possible d'utiliser la formule générale que nous avons adoptée pour le jet. Nous avons préféré utiliser les lissages qui sont d'une utilisation numérique plus aisée.

Dans le cas général, lorsque la buse est différente de celle que nous avons adoptée, il est préférable de se servir de la formule générale : cependant, il faut connaître la position du pôle. Nous pensons continuer nos travaux sur ce point et donner une méthode générale pour la déterminer.

V.1. CALCUL DU GAIN EN PRESSION

Nous avons vu que l'équation du jet s'écrivait :

$$u(x,y) = U(x) \cdot f(\eta)$$

avec :

$$\eta = \eta_c \cdot \frac{y}{y_c(x)}$$

où les lissages utilisés pour notre buse sont :

(1) $$\frac{U(x)}{U_s} = \frac{1}{0{,}8.e^{-0{,}37(x-2{,}9)} + \sqrt{\frac{x-2{,}9}{5}}}$$

(2) $$Y_c(x) = 0{,}0665x + 0{,}09 + \sqrt{0{,}00164\,x^2 - 0{,}0324\,x + 0{,}168}$$

Dans la suite nous ferons appel aux formules ci-dessus pour les calculs.

Nous prendrons aussi pour valeur pratique de $tg\,\alpha$ en fonction de P_c :

(3) $$tg\,\alpha = 0{,}77 \cdot \frac{P_s}{P_{i,s}} = \frac{Y_m}{x - x_p}$$

où X_p est l'abscisse du pivot.

Nous tiendrons compte de la pression statique à la sortie de la buse en écrivant que :

(4) $$\frac{P(x)}{P_{i,s}} = 0{,}94\left[\frac{U(x)}{U_s}\right]^2$$

Les deux récepteurs de largeur L_r peuvent être séparés par un évent central de largeur L_e . Nous écrirons que la pression récupérée dans un récepteur est égale à la pression moyenne calculée sur l'intervalle correspondant à ce récepteur. Soit :

$$P_r = \frac{1}{L_r}\int_{L_e/2}^{L_e/2 + L_r} P(x,y)\,dy$$

La différence de pression recueillie sera donc égale à :

$$(5)\quad \Delta P_r = \frac{1}{L_r}\left[\int_{l_e/2}^{l_e/2+L_r} P(x,y)\,dy - \int_{-(l_e/2+L_r)}^{-l_e/2} P(x,y)\,dy\right]$$

Nous pouvons lier $P(x,y)$ à $u(x,y)$ par la relation :

$$\frac{P(x,y)}{P(x)} = \left[\frac{u(x,y)}{U(x)}\right]^2$$

Nous devons faire une restriction pour cette formule : nous négligeons en effet le terme $\overline{\rho u'^2}$. Or, s'il est faible pour $y=0$, il devient important pour $y=y_c$. Son influence se fera sentir sur $y_c(x)$ Lorsque nous considérons le profil des pressions, la valeur de $y_c(x)$ relative à celui-ci est en fait plus grande que celle trouvée. Le jet paraît en fait plus large.

$$(6)\quad \frac{P(x,y)}{P_{i,s}} = 0,94\left[\frac{u(x,y)}{u_s}\right]^2$$

En tenant compte de 4 :

$$u(x,y) = U(x)\cdot f(\eta^*)$$

où $\eta^* = \eta_c \cdot \dfrac{y-y_m}{y_c(x)}$

ou encore

$$\eta^* = \eta_c \cdot \frac{y-(x-x_p)\operatorname{tg}\alpha}{y_c(x)}$$

et la valeur de ΔP_r devient :

$$(7)\quad \Delta P_r/P_{i,s} = \frac{0,94}{L_r}\left[\frac{U(x)}{U_s}\right]^2\left[\int_{l_e/2}^{l_e/2+L_r} f^2(\eta)\cdot dy + \int_{-l_e/2}^{-(l_e/2+L_r)} f^2(\eta)\cdot dy\right]$$

ou encore en faisant le changement de variable :

$$\eta = \eta_c \cdot \left[\frac{Y - Y_M}{Y_c} \right]$$

et en posant :

$$\ell_e = \frac{L_e}{L_s} \qquad \ell_r = \frac{L_r}{L_s}$$

$$\eta_1 = \eta_c \left[\frac{\ell_e/2 - Y_M}{Y_c} \right]$$

$$\eta_2 = \eta_c \left[\frac{\ell_r + \ell_e/2 - Y_M}{Y_c} \right]$$

$$\eta_3 = -\eta_c \left[\frac{\ell_e/2 + Y_M}{Y_c} \right]$$

$$\eta_4 = -\eta_c \left[\frac{\ell_r + \ell_e/2 + Y_M}{Y_c} \right]$$

$$(8) \quad \Delta P_r / P_{i,s} = 0{,}94 \cdot \frac{Y_c}{\eta_c} \cdot \frac{1}{\ell_r} \left[\frac{U(x)}{U_s} \right]^2 \left[\int_{\eta_1}^{\eta_2} F^2 \, d\eta + \int_{\eta_3}^{\eta_4} F^2 \, d\eta \right]$$

En utilisant pour $f(\eta)$ la formule en $th : (1 - th^2 \eta)$

Nous trouvons :

$$(9) \quad \Delta P_r / P_{i,s} = 0{,}94 \cdot \frac{Y_c}{\eta_c} \cdot \frac{1}{\ell_r} \left[\frac{U(x)}{U_s} \right]^2 \cdot H$$

avec :

$$(10)\quad H = th\,\eta_2 + th\,\eta_4 - th\,\eta_1 - th\,\eta_3 - \frac{1}{3}\left[th^3\eta_2 + th^3\eta_4 - th^3\eta_1 - th^3\eta_3\right]$$

Pour le calcul du gain en pression, nous définierons celui-ci comme la pente de la courbe $\Delta P_r = f(\Delta P_c)$ à l'origine. Soit :

$$G_p = \frac{d(\Delta P_r)}{d(\Delta P_c)\,\Delta P_c = 0}$$

Nous pouvons écrire d'autre part :

$$\frac{d(\Delta P_r)}{d(\Delta P_c)} = \frac{d(\Delta P_r)}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d(\Delta P_c)}$$

$$\frac{d\eta}{d(\Delta P_c)} = -\eta_c \cdot \frac{x - x_p}{y_c(x)} \cdot \frac{d(tg\,\alpha)}{d(\Delta P_c)} = -\eta_c \frac{(x - x_p)}{y_c(x)} \cdot \frac{0{,}77}{P_{i,s}}$$

en utilisant (7) et (3).

Comme d'autre part :

$$\frac{d(\Delta P_r)}{d\eta} = 0{,}94 \cdot P_{i,s} \cdot \frac{y_c}{\eta_c} \cdot \frac{1}{\ell_r} \cdot \left[\frac{U(x)}{U_s}\right]^2 \left[f^2(\eta_2) + f^2(\eta_4) - f^2(\eta_1) - f^2(\eta_3)\right]$$

$$(11)\quad G_p = 0{,}72 \cdot \frac{(x - x_p)}{\ell_r} \cdot \left[\frac{U(x)}{U_s}\right]^2 \cdot \left[f^2(\eta_1) + f^2(\eta_3) - f^2(\eta_2) - f^2(\eta_4)\right]$$

et puisque $\Delta P_c = 0$ $\quad Y_M = 0$ et $\quad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ deviennent :

$$\eta_1 = \eta_3 = \eta_c \frac{\ell_e/2}{y_c} \qquad \eta_2 = -\eta_4 = \eta_c \left[\frac{\ell_r + \ell_e/2}{y_c}\right]$$

Comme f est une fonction paire :

$$(12) \quad G_p = 1,44 \cdot \frac{(x - x_p)}{l_r} \cdot \left[\frac{U(x)}{U_s}\right]^2 \cdot \left[f^2\left(\eta_c \cdot \frac{l_e}{2Y_c}\right) - f^2\left(\eta_c \cdot \frac{2l_r + l_e}{2Y_c}\right)\right]$$

Dans laquelle 1,44 est un coefficient expérimental.

Cette formule permet le calcul du gain en pression lorsque nous fixons l_r, l_e et x. Notons que tous ces paramètres sont adimensionnels et qu'ils sont rapportés à la buse d'alimentation.

Nous avons tracé en fonction de x, les valeurs de G_p pour l_r fixe et l_e variable (fig. 97). G_p présente un maximum qui est fonction de la valeur de l_e. D'après les résultats théoriques, nous constatons que le récepteur ne doit pas être trop éloigné et que l'évent central dans la mesure où la stabilité n'est pas compromise doit être de faible largeur. A la limite $(l_e = 0)$ le gain n'a donc pas de signification.

Les valeurs que l'on peut espérer ne sont pas très élevées, mais nous avons supposé que L_c/L_s était égal à l'unité. Cela veut dire que nous pouvons obtenir des gains plus grands si L_c/L_s augmente. Dans le même temps, on diminuera l'impédance d'entrée.

Sur les figures 98.a et 98.b, nous avons fait varier l_r en laissant l_e fixe. G_p est aussi très sensible à la largeur du récepteur. Plus celui-ci est grand, plus le gain diminue, ce qui est normal puisque dans G_p il intervient au dénominateur. Mais aussi plus l_r est grand, plus est faible l'impédance de sortie de l'élément. C'est un point très important et nous verrons comment il est possible de calculer le gain d'un amplificateur à plusieurs étages.

V.2. AMPLIFICATEURS EN CASCADE

Lorsque nous connectons un deuxième amplificateur à l'aval du premier, nous réalisons une amplification plus grande que celle qui est réalisée avec un seul élément.

L'idéal dans ce cas serait d'obtenir un gain résultant égal au produit des gains élémentaires.

Si G_1 et G_2 sont les valeurs de ces gains, il faut tendre vers la valeur :

$$G_p = G_1 . G_2$$

Cela est réalisé en particulier lorsque l'impédance de sortie du premier est faible devant l'impédance d'entrée du suivant. Ce principe est bien connu des électriciens. Cela signifie que la puissance transmise entre le premier et le second doit être faible.

Nous poserons :

$$\ell_{c1} = \frac{L_{c1}}{L_{s1}} \qquad \ell_{r1} = \frac{L_{r1}}{L_{s1}}$$

$$\ell_{c2} = \frac{L_{c2}}{L_{s2}} \qquad \ell_{r2} = \frac{L_{r2}}{L_{s2}}$$

$$\beta = \frac{L_{s2}}{L_{s1}}$$

Nous supposerons d'autre part que :

$$G_1 = \ell_{c1} \cdot g_1 \qquad . \; G_2 = \ell_{c2} \cdot g_2$$

où g_1 et g_2 sont indépendants de ℓ_{c1} et ℓ_{c2} . Ce sont les gains calculés pour $\ell_{c1} = \ell_{c2} = 1$

Nous pouvons écrire que :

$$G = \frac{\Delta P_{r2}}{\Delta P_{c1}} = \frac{\Delta P_{r2}}{\Delta P_{c2}} . \frac{\Delta P_{c2}}{\Delta P_{r1}} . \frac{\Delta P_{r1}}{\Delta P_{c1}}$$

ou encore

$$G = G_1 . G_2 . \frac{\Delta P_{c2}}{\Delta P_{r1}}$$

Nous devons déterminer $\frac{\Delta P_{c2}}{\Delta P_{r1}}$. Pour cela nous devons faire intervenir le débit qui passe dans le récepteur.

$$Q = L_{r1} \sqrt{2 \frac{P_{r1} - P_{c2}}{\rho}} = m \sqrt{1 - kc} \; . L_{c2} \sqrt{2 \frac{P_{c2}}{\rho}}$$

Ceci est vrai si l'on peut considérer le récepteur comme parfait au sens où nous l'avons déterminé plus haut.

Cette expression donne

$$L_{r1}^2 . (\Delta P_{r1} - \Delta P_{c2}) = L_{c2}^2 . m^2 (1 - kc) . \Delta P_{c2}$$

$$\frac{\Delta P_{r1}}{\Delta P_{c2}} = \left[\frac{L_{c2}}{L_{r1}} \right]^2 . m^2 (1 - kc) + 1$$

avec $$\frac{L_{c2}}{L_{r1}} = \frac{l_{c2}}{l_{r1}} . \beta$$

et en posant :

$$\beta^2 . m^2 (1 - kc) = \alpha^2$$

$$\frac{\Delta P_{c2}}{\Delta P_{r1}} = \frac{1}{1 + \left(\alpha \frac{l_{c2}}{l_{r1}} \right)^2}$$

L'expression du gain devient :

(13) $$G = g_1 \cdot g_2 \cdots \frac{\ell_{c1} \cdot \ell_{c2}}{1 + \left(\alpha \frac{\ell_{c2}}{\ell_{r1}}\right)^2}$$

Posons :

$$G = \ell_{c1} \cdot g_2 \cdot A$$

g_1 est une fonction de ℓ_{r1} et g_2 une fonction de ℓ_{r2}.
Les conditions d'extremum de A sont :

$\frac{\partial A}{\partial \ell_{c2}} = 0$ pour laquelle une solution existe si

$\alpha > 1$ soit $\beta . m . \sqrt{(1 - k_c)} > 1$

Il vient alors :

(14) $$\frac{\alpha^2}{\ell_{r1}^2} \left(\ell_{c2} - 2\right) \cdot \ell_{c2} + 1 = 0$$

qui donne une condition entre les dimensions des canaux de sortie du premier et ceux d'admission du second.

La seconde condition sera :

$\frac{\partial A}{\partial \ell_{r1}} = 0$ qui entraîne

(15) $$g_1 + \ell_{r1} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial \ell_{r1}} = 0$$

qui est utilisé avec les résultats que nous avons trouvé pour $g_1(\ell_{r1})$.
La solution n'existe pas et il suffit alors de prendre ℓ_{r1} au moins

égal à 1,5.

V.3. CALCUL DU GAIN EN DEBIT

Nous utiliserons les mêmes équations qu'en V.1. Nous déduirons du gain en pression le gain en débit :

$$G_d = \frac{d(\Delta Q_r)}{d(\Delta Q_c)}$$

Il est défini comme le gain en pression.

$$G_d = \frac{d(\Delta Q_r)}{d(\Delta P_r)} \cdot \frac{d(\Delta P_r)}{d(\Delta P_r)_{Q_r=0}} \cdot \frac{d(\Delta P_r)_{Q_r=0}}{d(\Delta P_c)} \cdot \frac{d(\Delta P_c)}{d(\Delta Q_c)}$$

or

$$\frac{d(\Delta P_r)}{d(\Delta P_c)}_{Q_r=0} = G_p$$

$\frac{d(\Delta P_c)}{d(\Delta Q_c)} = R_c$ impédance d'entrée

$\frac{d(\Delta P_r)}{d(\Delta Q_r)} = R_r$ impédance de sortie

$\frac{d(\Delta P_r)}{d(\Delta P_r)_{Q_r=0}} = \sigma$ représente le rendement du récepteur.

$$G_d = \frac{R_c}{R_r} \cdot \mathcal{E} \cdot G_p$$

La résistance d'entrée s'exprime facilement en remarquant que :

$$R_c = \frac{d(\Delta P_c)}{d(\Delta Q_c)} = 2 \cdot \frac{P_c}{Q_c}$$

que l'on détermine facilement à l'aide de la caractéristique :

$$Q_c = m_c \cdot \sqrt{1 - k_c} \cdot \sqrt{2 \frac{P_c}{\rho}}$$

V. 4. ESSAIS D'AMPLIFICATEURS PROPORTIONNELS

Afin de vérifier les formules proposées pour le gain en pression, nous avons réalisé sur la maquette à grande échelle différentes configurations d'amplificateurs, en adjoignant deux récepteurs et un évent central. Nous avons fait varier l'éloignement D/L_s .

Les essais ont été toujours très délicats car il était difficile de centrer correctement les récepteurs sur le jet lorsque $\Delta P_c = 0$.

Les résultats portés figure 99 montrent que les points expérimentaux ne sont pas trop éloignés de la courbe théorique, tout en étant au-dessous de celle-ci.

Nous pensons donc que l'étude que nous avons faite est limitée à une estimation des performances et qu'elle donne dans tous les cas une bonne approximation sur les valeurs à donner aux différents paramètres. Dans ce but, nous avons porté figure 100 le gain maximum et les valeurs correspondantes de D/L_s (X sur la figure) et de ℓ_r pour ℓ_e donné. En utilisant ce graphique, il est possible de déterminer D/L_s en fonction de ℓ_e et ℓ_r par exemple, l'étude devant être achevée expé-

rimentalement.

Un autre problème risque cependant de se poser, c'est celui de la réduction d'échelle.

Lorsque nous avons diminué les différentes dimensions du modèle expérimental pour réaliser un amplificateur miniature (réduction 1/6) les performances se sont trouvées modifiées et les courbes de récupération n'étaient pas identiques.

C'est un inconvénient. Les différences relevées peuvent provenir de l'écoulement dans la buse et en particulier de la position du pôle. Virto avait déjà remarqué que l'écoulement dans la buse d'un élément logique n'obéissait pas à une similitude de Reynolds.

V.5. AMPLIFICATEURS A SATURATION

La courbe de récupération $\Delta P_r (\Delta P_c)$ d'un amplificateur fluide proportionnel comporte après le maximum une partie à pente négative. Le jet est en effet suffisamment dévié pour passer à côté des deux récepteurs. Cette portion de caractéristique est un élément d'instabilité dans les chaines de régulation. Pour éviter que la pression baisse lorsque P_c augmente, nous avons essayé de réaliser un élément pour lequel ΔP_r reste constant à partir d'une certaine valeur de ΔP_c . La caractéristique doit comporter une saturation.

La présence d'obstacles latéraux près des récepteurs (fig. 102) limite le champ d'écoulement et guide le jet vers le récepteur voisin lorsqu'il est fortement dévié.

Les enregistrements 101 et 102 montrent une différence dans la forme et dans la pente des courbes.

L'effet des obstacles varie avec D/L_s . Sur les courbes 103 et 104 nous voyons que l'objectif est atteint pour $D/L_s = 10$. Si $D/L_s < 10$ ou $D/L_s > 10$ ils agissent pour des valeurs trop faibles ou trop fortes de ΔP_c .

Le même phénomène se produit figures 105, 106, 107 pour $\ell_e = 1,7$; et pour la courbe $D/L_s = 10$ la partie plate est bien marquée.

Il nous a donc semblé qu'avec la position des obstacles, relative aux saturateurs que nous avons adoptés, la valeur $D/L_s = 10$ était optimale dans les deux cas.

Il resterait cependant à déplacer les triangles par rapport aux récepteurs (ce que nous avons fait dans un premier temps pour dégrossir le problème) pour parfaire le réglage.

La figure 108 montre une des réalisations à laquelle nous sommes parvenus. Nous espérons réduire la dimension de cet élément et augmenter son gain actuel (6).

V.6. CONCLUSION

Si les résultats fournis par l'étude théorique sont convenables, il faudra dans l'avenir essayer de connaître l'écoulement autour des récepteurs avec plus de précision pour en extraire les valeurs du gain plus exactes.

Nous avons vu qu'il était possible d'utiliser différentes sortes de buses, mais les essais que nous avons faits sur les récepteurs indiquent l'influence considérable de l'angle extérieur. Nous pensons donc qu'il serait souhaitable d'aborder le problème d'écoulement sur les pointes par l'étude de l'écoulement d'un jet sur un diédre placé symétriquement par rapport à son axe.

ANNEXE

- : -

DETERMINATION DU PROFIL DES VITESSES D'UN JET TURBULENT

ISSU D'UN AJUTAGE DE FORME QUELCONQUE

I. JETS A SYMETRIE DE REVOLUTION

Le jet est issu d'un ajutage à section circulaire de rayon R . Nous supposerons que le profil des vitesses dans la zone établie est égal à :

(1) $$u(x,r) = U(x).f(\eta)$$

où f dépend de x et de r par leur rapport.

(2) $$\eta = \sigma \frac{r}{x}$$

Nous supposerons que la variation de la vitesse axiale dans cette zone est inversement proportionnelle à la distance (réf. 1) et nous poserons avec Schlichting :

(3) $$U(x) = \frac{A}{x}$$

A est une grandeur que l'on peut calculer si l'on connait la loi de variation de quantité de mouvement avec l'abscisse :

$$\int_{(P)} U^2(x) \cdot r \cdot f^2(\eta) \cdot dr \cdot d\theta = k_1(x) \cdot U_s^2 \cdot \pi \cdot R^2$$

D'une manière générale si S est la section de l'orifice, nous aurons :

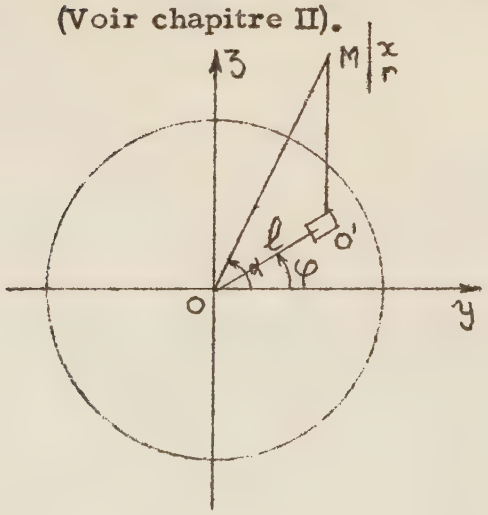
(4) $$A^2 = \frac{k_1(x) \cdot \rho^2 \cdot U_s^2 \cdot R^2}{2\int_0^\infty \eta f^2 \cdot d\eta}$$

Nous ferons les hypothèses suivantes :

- un jet provenant d'un ajutage de section quelconque, mais dont le rapport de la dimension la plus grande à la dimension la plus faible est fini, se comporte à l'infini comme un jet issu d'un ajutage circulaire ayant la même section ;

- les vitesses sont supposées uniformes à la sortie pour le cas traité ;

- la quantité de mouvement d'un élément de coordonnée x, r est égale à la somme des quantités de mouvement de chaque jet élémentaire au point x, r qui composent le jet principal. (Voir chapitre II).



D'après la première hypothèse nous écrirons qu'un jet dont la section de l'orifice est :

$$ds = l \cdot dl \cdot d\varphi$$

induira en M une quantité de mouvement égale à :

$$\Delta(u^2) = U^2 \cdot f^2(\eta_1)$$

où $U^2 = \frac{A^2}{\lambda^2}$

et $A^2 = \frac{k_1(x) \cdot \Gamma^2 \cdot U_s^2 \cdot \ell \cdot d\ell \cdot d\varphi}{2\pi \int_0^\omega \eta^2 f^2 \, d\eta}$

et $\eta_1 = \Gamma \frac{\overline{O'M}}{\chi}$

$$\overline{O'M} = \sqrt{r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cdot \cos(\varphi - \alpha)}$$

$$\frac{\Delta(u^2)}{U_s^2} = C^2 \frac{\ell \cdot d\ell \, d\varphi}{\chi^2} \cdot f^2(\eta_1)$$

Il vient donc :

$$\frac{u^2(x,r,\alpha)}{U_s^2} = \frac{C^2}{\chi^2} \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^R f^2(\eta_1) \cdot \ell \cdot d\ell \right] \cdot d\varphi \right]$$

En faisant le changement de variable :

$$\gamma = \varphi - \alpha$$

u^2 ne dépend plus de α .

(5) $$\frac{u^2(x,r)}{U_s^2} = \frac{C^2}{\chi^2} \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^R f^2(\eta_1) \, \ell \cdot d\ell \right] d\gamma \right]$$

(6) avec : $\eta_1 = \frac{\sigma}{x}\sqrt{r^2 + \ell^2 - 2\ell r \cos\gamma}$

Les solutions de $f(\eta)$ qui peuvent être employées sont :

a. Solution de Schlichting (réf. 1)

L'auteur démontre qu'en utilisant l'hypothèse de Prandtl et l'équation de couche limite, il est possible de mettre l'expression de la vitesse dans la zone des profils établis sous la forme :

(7) $$u(x,r) = \frac{1}{(1+\eta^2/4)^2}$$

(8) où $\eta = \sigma \frac{r}{x}$

L'équation 15 est intégrable et donne une fonction extrêmement complexe.

b. Solution de Reichardt (réf. 2)

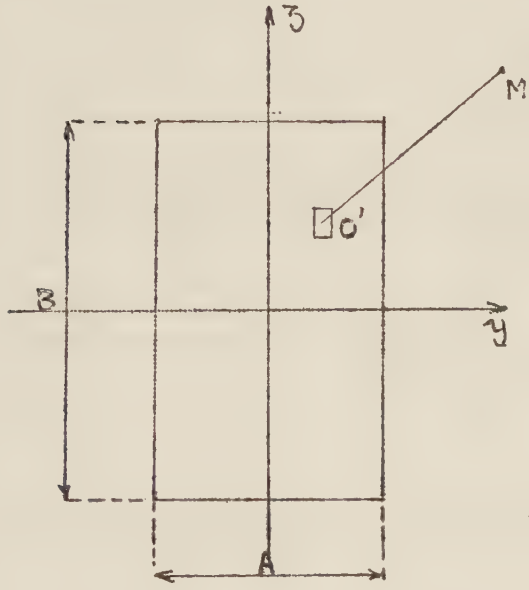
L'auteur propose la même solution que pour les jets plans, en partant des mêmes hypothèses (voir chapitre II), soit :

(9) $$\frac{\overline{(u+u')^2}}{U^2(x)} = e^{-\eta^2/2}$$

Il est possible soit d'obtenir le profil des pressions totales, soit en négligeant $\rho\overline{u'^2}$ d'en déduire $u(x,r)$. L'équation n'est pas intégrable.

II. JETS ISSUS D'UN AJUTAGE RECTANGULAIRE

Les hypothèses que nous avons faites sont toujours valables et nous écrirons :



$$A^2 = \frac{k_1(x) \cdot \nabla^2 U_s^2 \, dy \cdot dz}{2\pi \int_0^\infty \eta f^2 \, d\eta}$$

$$\eta_1 = \sigma \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}$$

$$\frac{\Delta(u^2)}{U_s^2} = \frac{c^2}{x^2} \, dy \cdot dz \cdot f^2(\eta_1)$$

Et l'expression devient :

$$(10) \qquad \frac{u^2(x,y,z)}{U_s^2} = \frac{c^2}{x^2} \left[\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} \left[\int_{-B/2}^{B/2} f^2(\eta_1) \cdot dz \right] dy \right]$$

Cette expression peut être utilisée avec les solutions (7) et (9).

Après avoir traité ces deux cas, il est facile de voir que nous pouvons étendre la solution aux ajutages de formes quelconques et tenir compte de la couche limite. En général, la solution sera numérique.

III. JETS ISSUS D'UN AJUTAGE DE FORME QUELCONQUE

Soit (C) le domaine limité par les bords de l'ajutage, l'intégration précédente devient en posant toujours :

$$\eta_1 = \sigma \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{r}$$

et :

$$A^2 = \frac{k_s(x)\cdot \sigma^2 \cdot U_s^2 \cdot ds}{2\pi \int_0^\infty \eta f^2 \, d\eta} = C^2 \cdot U_s^2 \cdot ds$$

(11)
$$\frac{u^2(x,y,z)}{U_s^2} = \frac{C^2}{x^2} \iint_{(C)} f^2(\eta_1) \cdot ds$$

Si l'on veut tenir compte de la répartition des vitesses, il faut poser :

$$U_s(y,z) = U_s \cdot g(y,z)$$

et

(12)
$$\frac{u^2(x,y,z)}{U_s^2} = \frac{C^2}{x^2} \iint_{(C)} g(y,z) \cdot f^2(\eta_1) \cdot dy \cdot dz$$

qui est la fonction la plus générale.

CONCLUSION

- : -

Après quelques années d'apprentissage à la recherche dans le Laboratoire de l'Institut de Mécanique des Fluides, essayons de dresser un bilan de nos travaux.

Lorsque nous avons abordé le problème d'intéraction de jets pour les besoins de l'amplification fluide, nous avons examiné tour à tour les diverses solutions proposées par la littérature. Nous nous sommes aperçus qu'aucune d'elles ne présentaient de caractère homogène, restrictives qu'elles étaient, chacune dans un domaine.

Les besoins exigeaient une expression unique de la vitesse dans le plan entier à l'aval de l'ajutage. Partant d'hypothèses simples, nous pensons être parvenus à une solution intéressante, dont le principal mérite est sa validité dans les zones établies.

Cette solution tient compte par ailleurs des conditions à la sortie de la buse ou au pôle. De plus, en partant des mêmes hypothèses, il est possible comme nous l'avons montré en annexe, de déterminer les profils de vitesse pour des jets issus d'ajutages quelconques.

Nous avons vérifié d'autre part que le principe de solidification pouvait être appliqué au jet principal pour de petites déviations dues à un écoulement latéral. Comme il n'y a pas de déformation du jet principal, ou très peu, nous avons supposé que dans la zone d'intéraction le mouvement était irrotationnel. L'expérience a montré que malgré ces hypothèses très restrictives, nous avons pu prévoir l'influence d'un écoulement sur l'autre. Cependant, il ne nous a pas été possible de déterminer avec une grande précision l'angle de déviation.

Dans l'optique de l'amplification fluide, les solutions qui sont

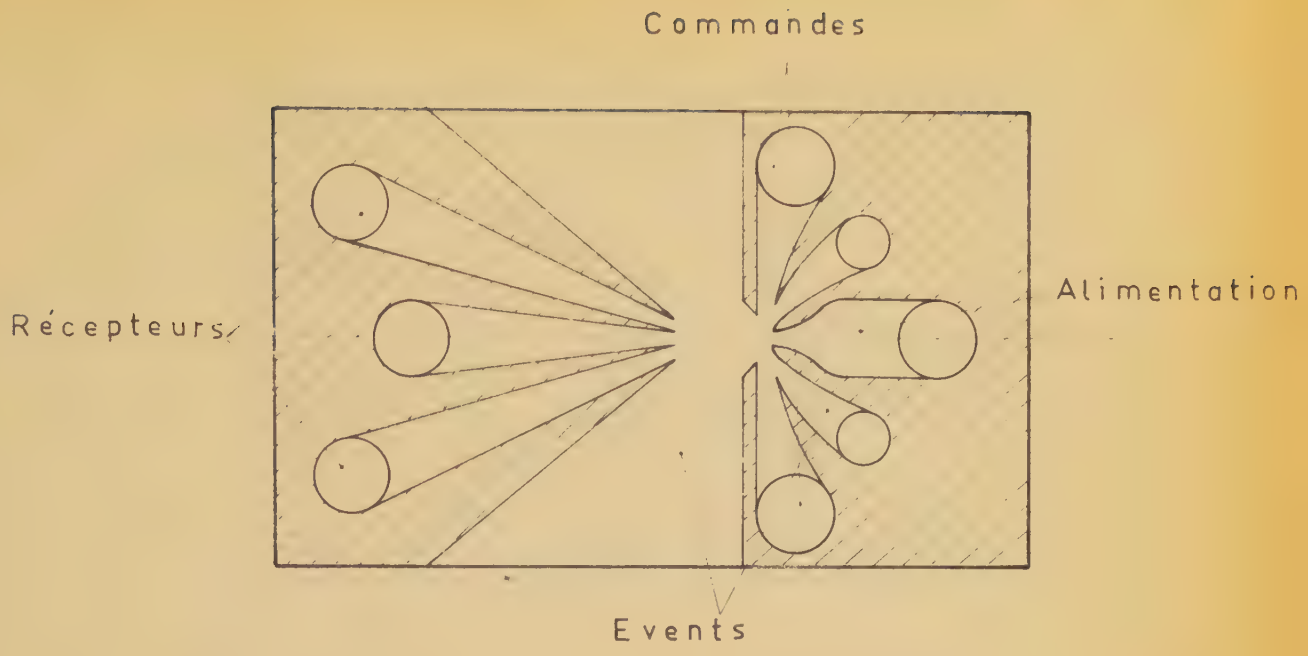
proposées dans cet ouvrage ont été utilisées pour déterminer l'impédance d'entrée et le gain en pression des amplificateurs proportionnels. Nous avons parallèlement montré l'influence de la position du pôle et son importance sur le choix d'une buse d'alimentation.

Les applications de ces résultats ne sont pas limitées aux seuls éléments analogiques, et nous pensons qu'ils donneront plus de rigueur au modèle mathématique de l'attachement du jet à une paroi.

Nous espérons donc que nos travaux serviront de base aux développements futurs et qu'ils pourront être considérés comme un outil. La recherche est souvent ingrate et si elle réserve des moments difficiles, qu'y a-t-il de plus encourageant pour le chercheur de savoir qu'il n'a pas fait oeuvre inutile.

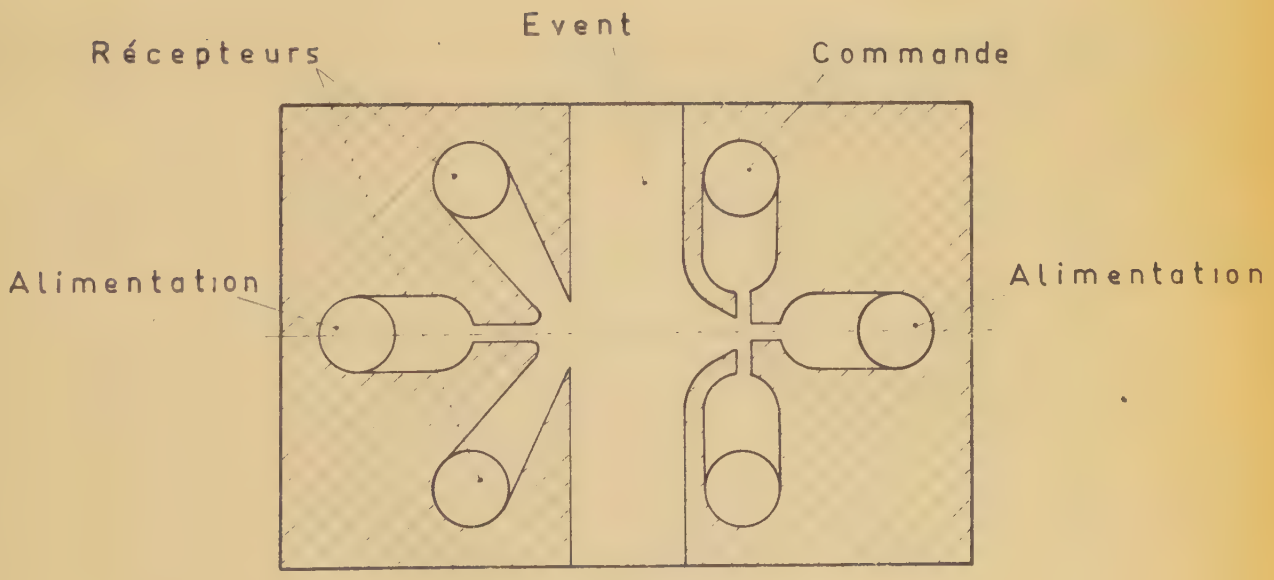
L'école de patience par laquelle nous sommes passés, nous a permis de nous familiariser avec des techniques qui dépassaient souvent le cadre des enseignements reçus. Nous pensons à l'électronique et au calcul numérique qui ont été un instrument quotidien. Par ce coté et par le contact soit livresque, soit humain avec d'autres chercheurs, ce fut pour nous un enrichissement constant ; et les moments de découragement se sont toujours rapidement estompés dans le climat chaleureux du laboratoire.

Nous espérons donc que ces travaux ne seront pas une fin mais une étape ..., une étape vers d'autres difficultés et d'autres joies.



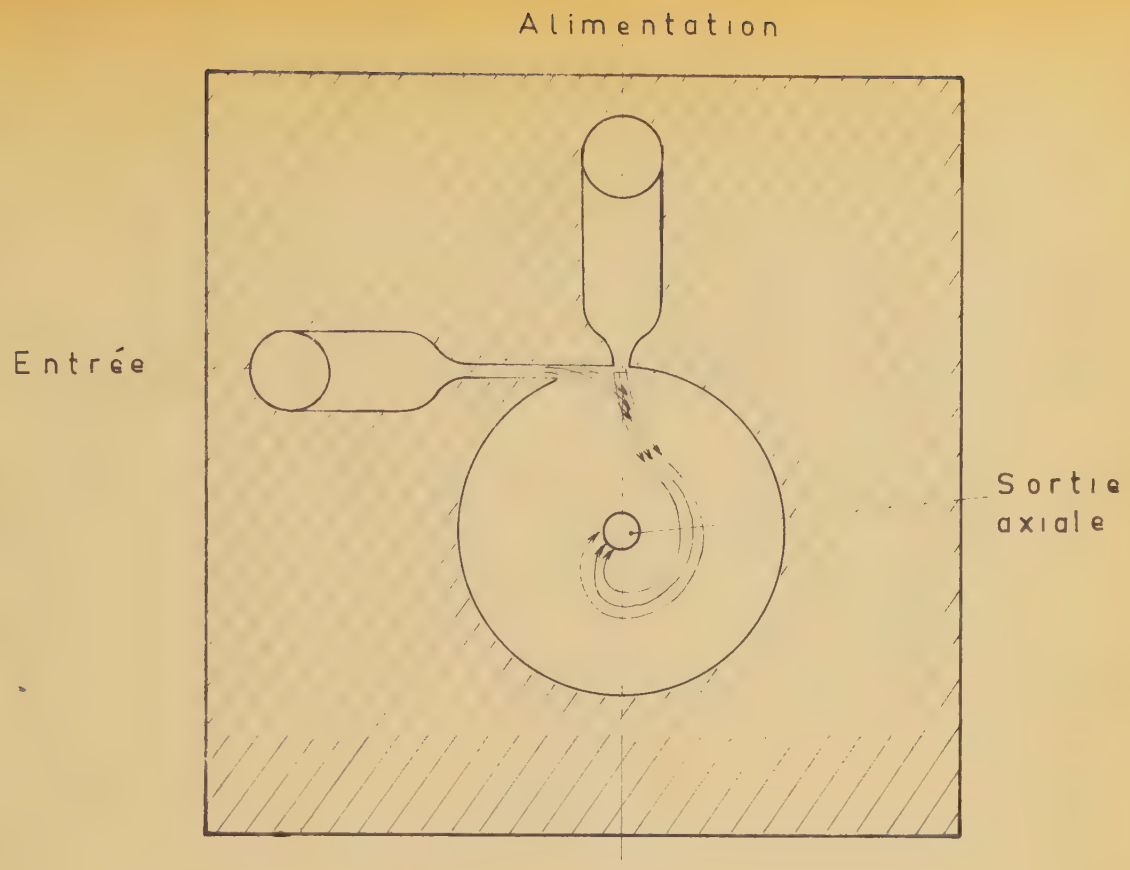
_ Amplificateur proportionnel _

FIGURE_1a

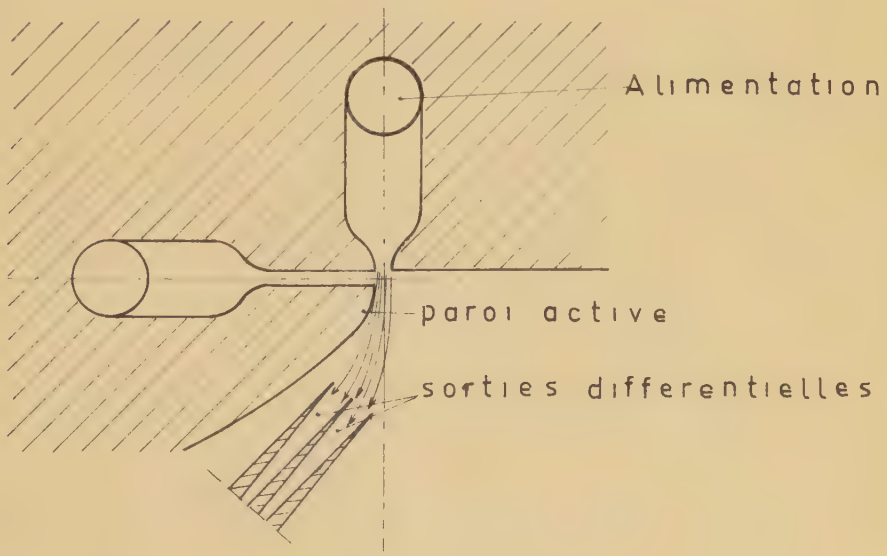


_ Amplificateur à déflection d'impact _

FIGURE_1b



a_ Vortex



b_ à effet de paroi

FIGURE_2

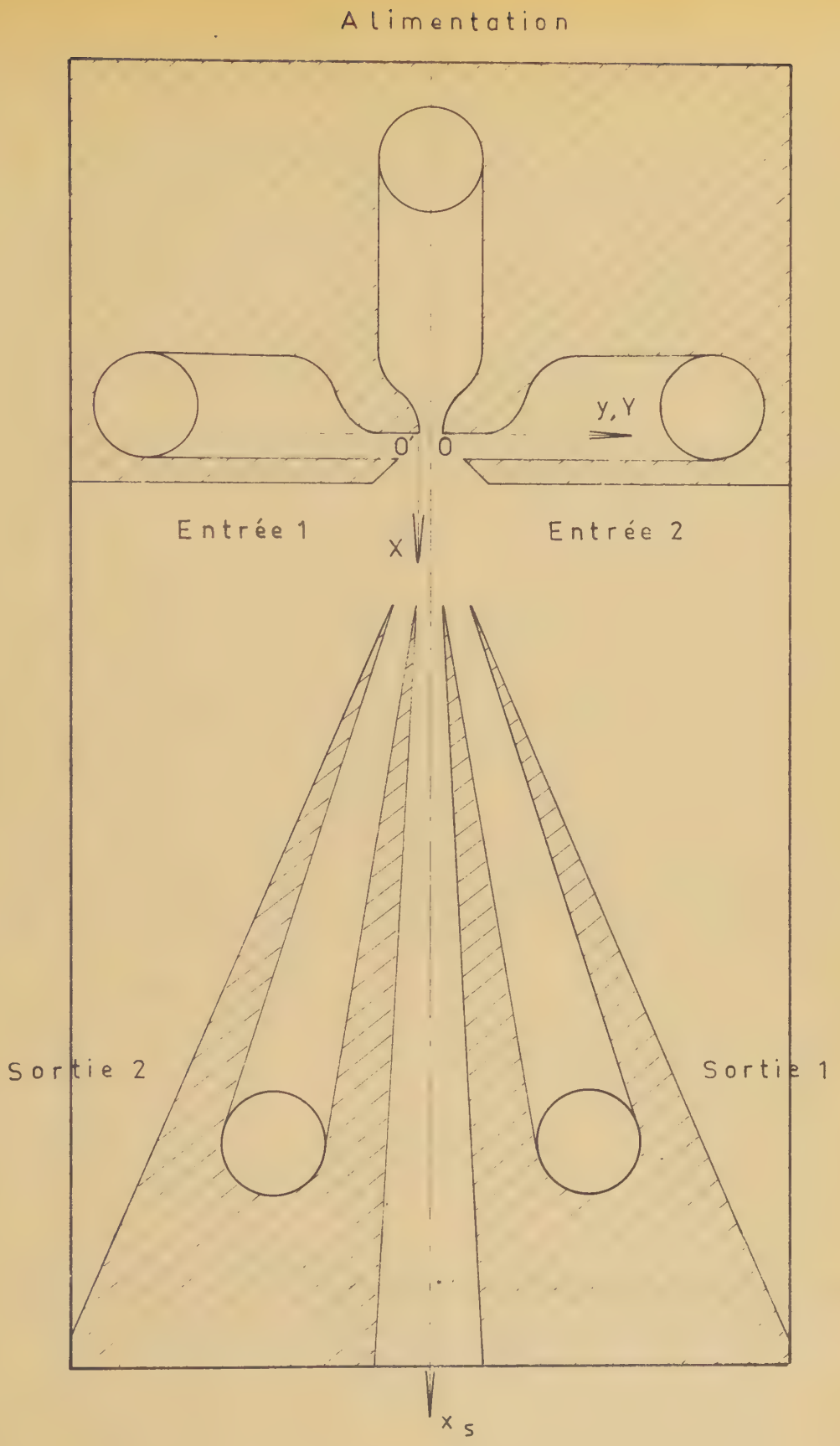


FIGURE_3

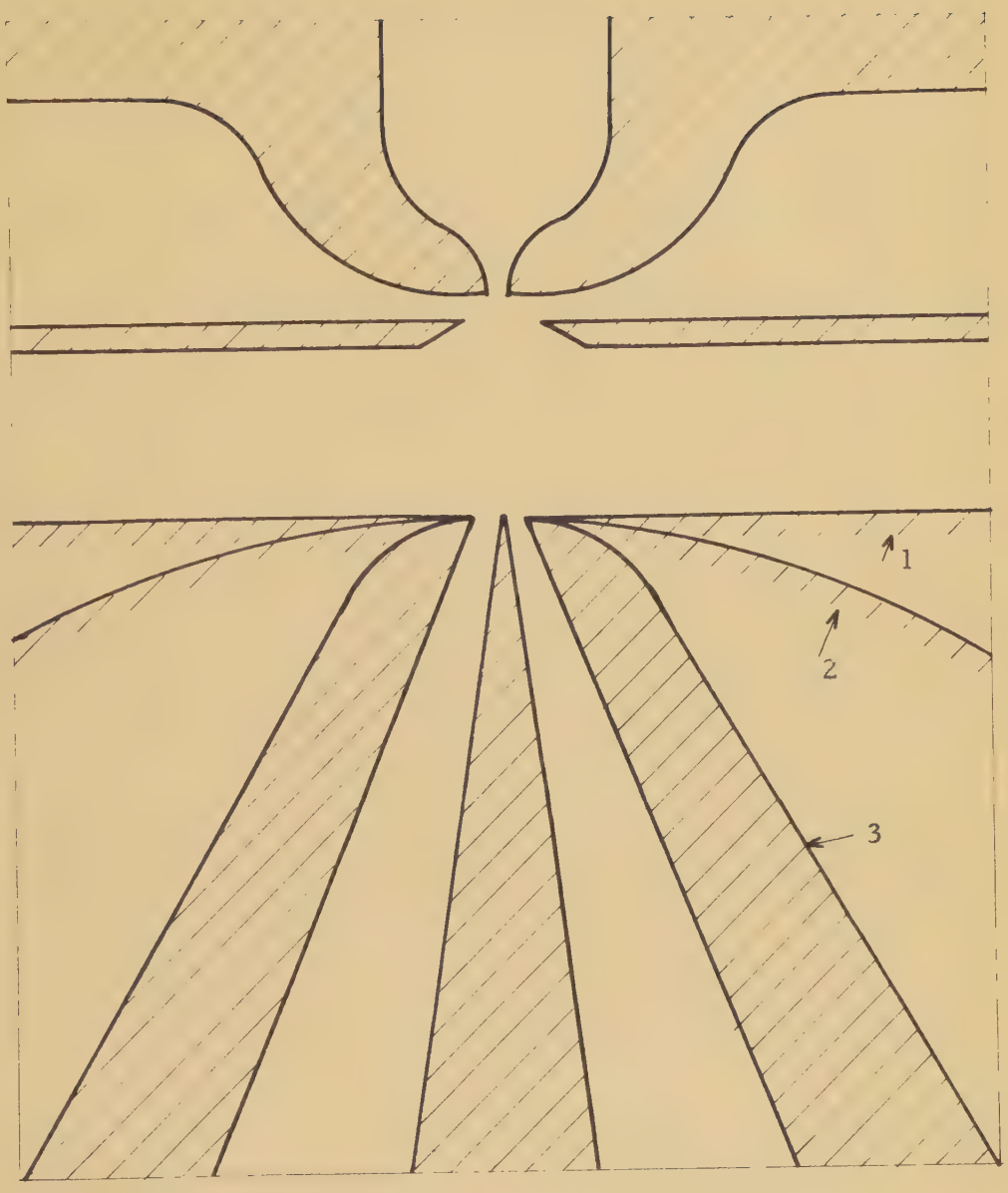


FIGURE_ 4

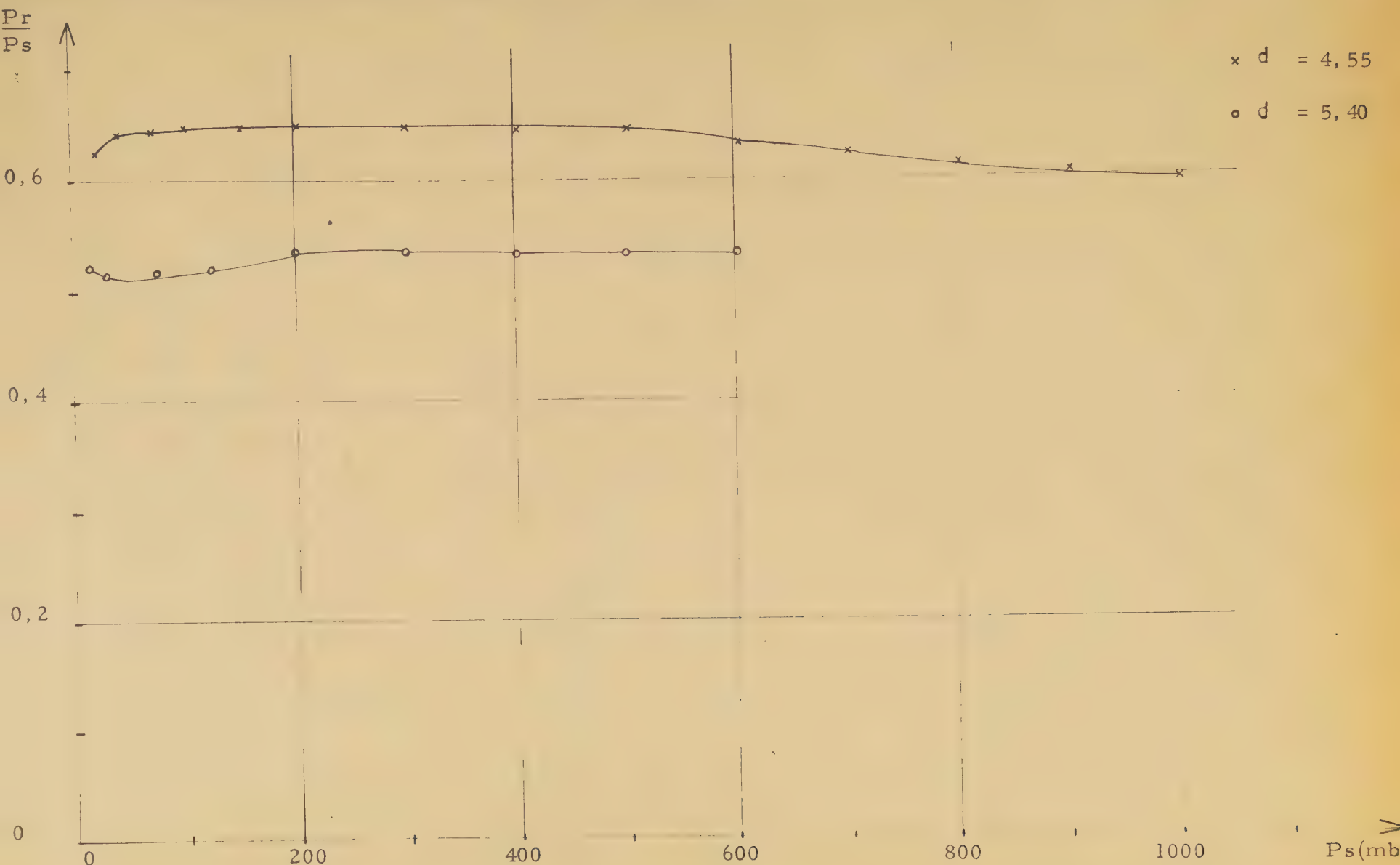
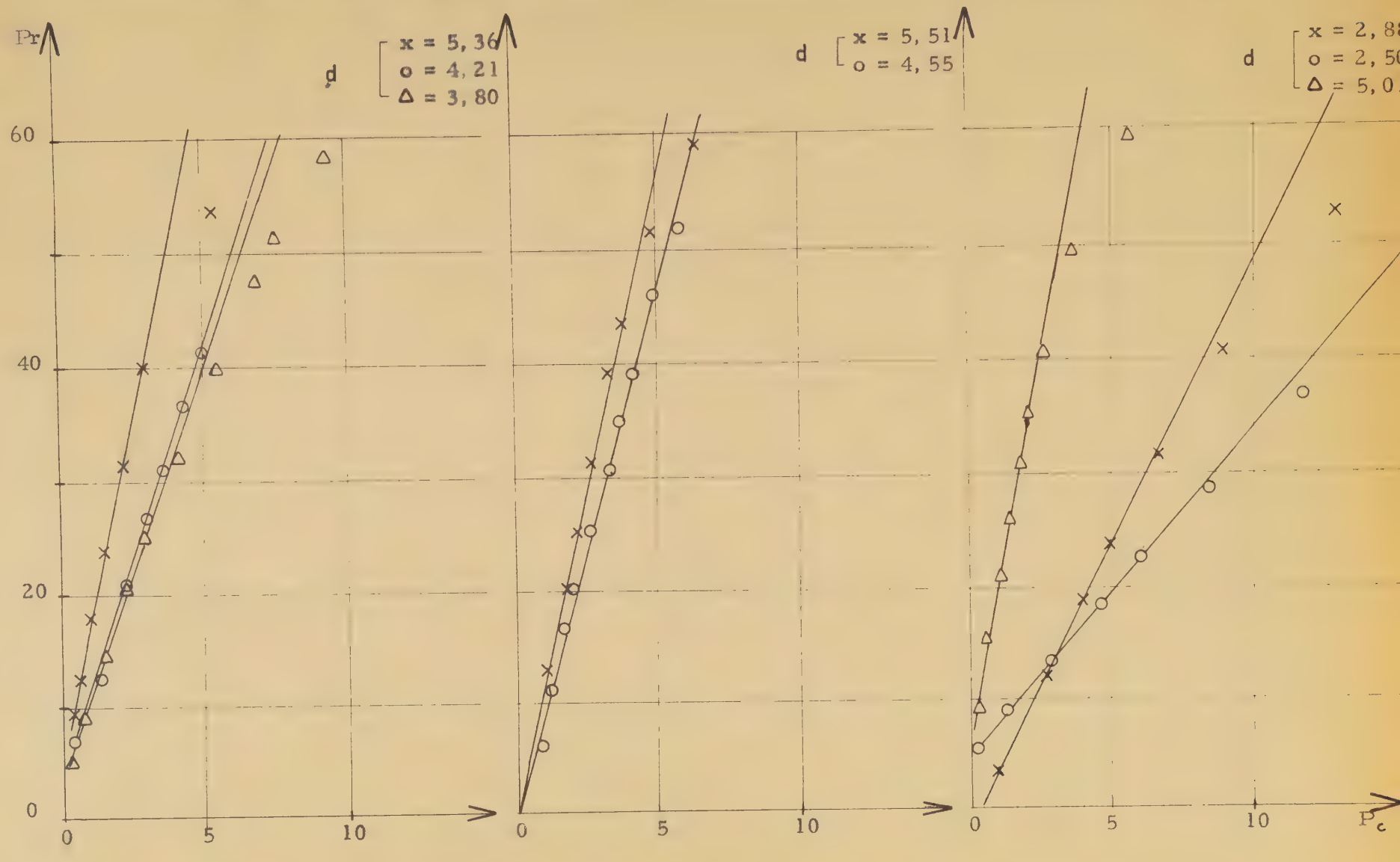


FIGURE - 5



h = 3

Récepteur 1

FIGURE_6

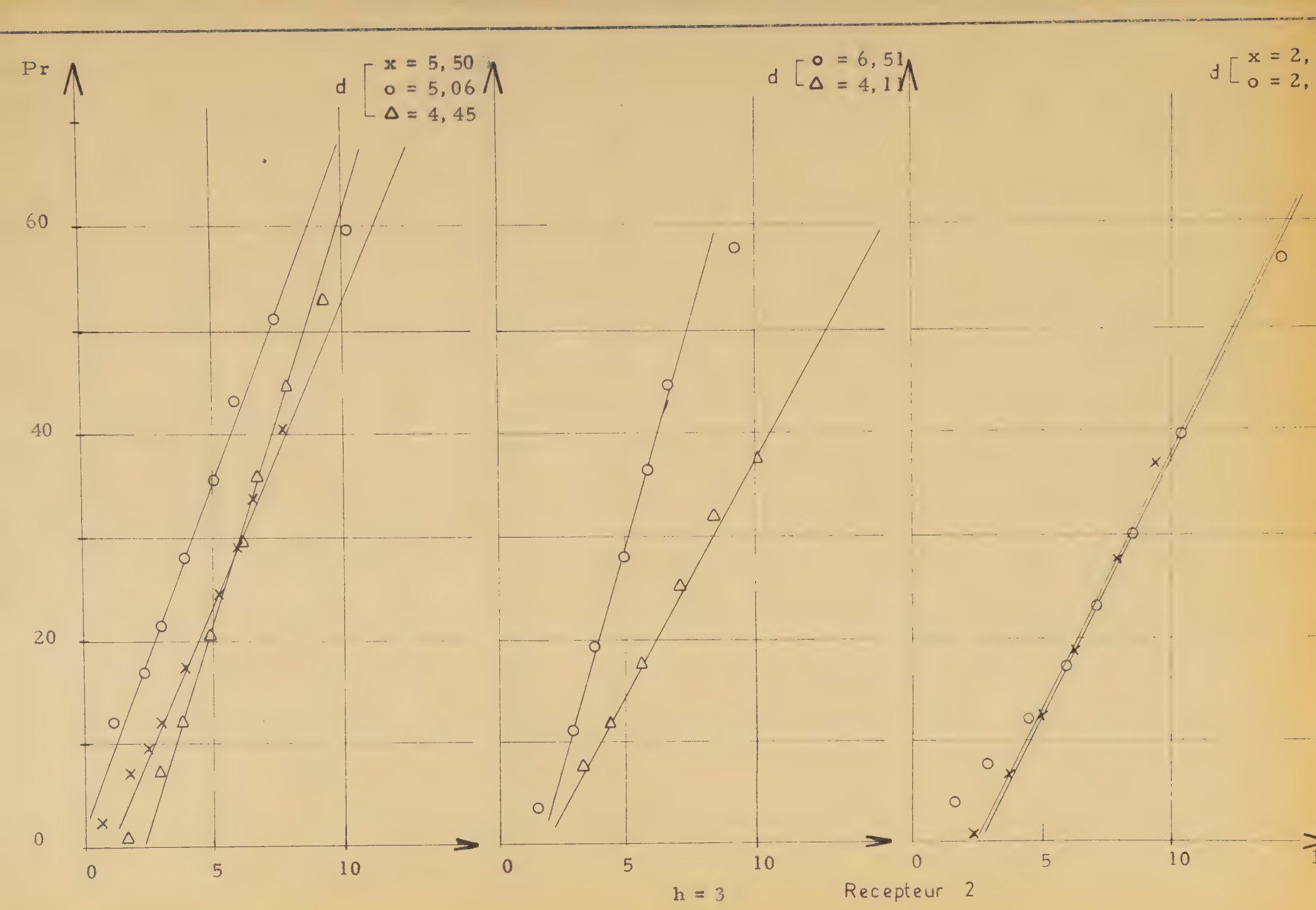
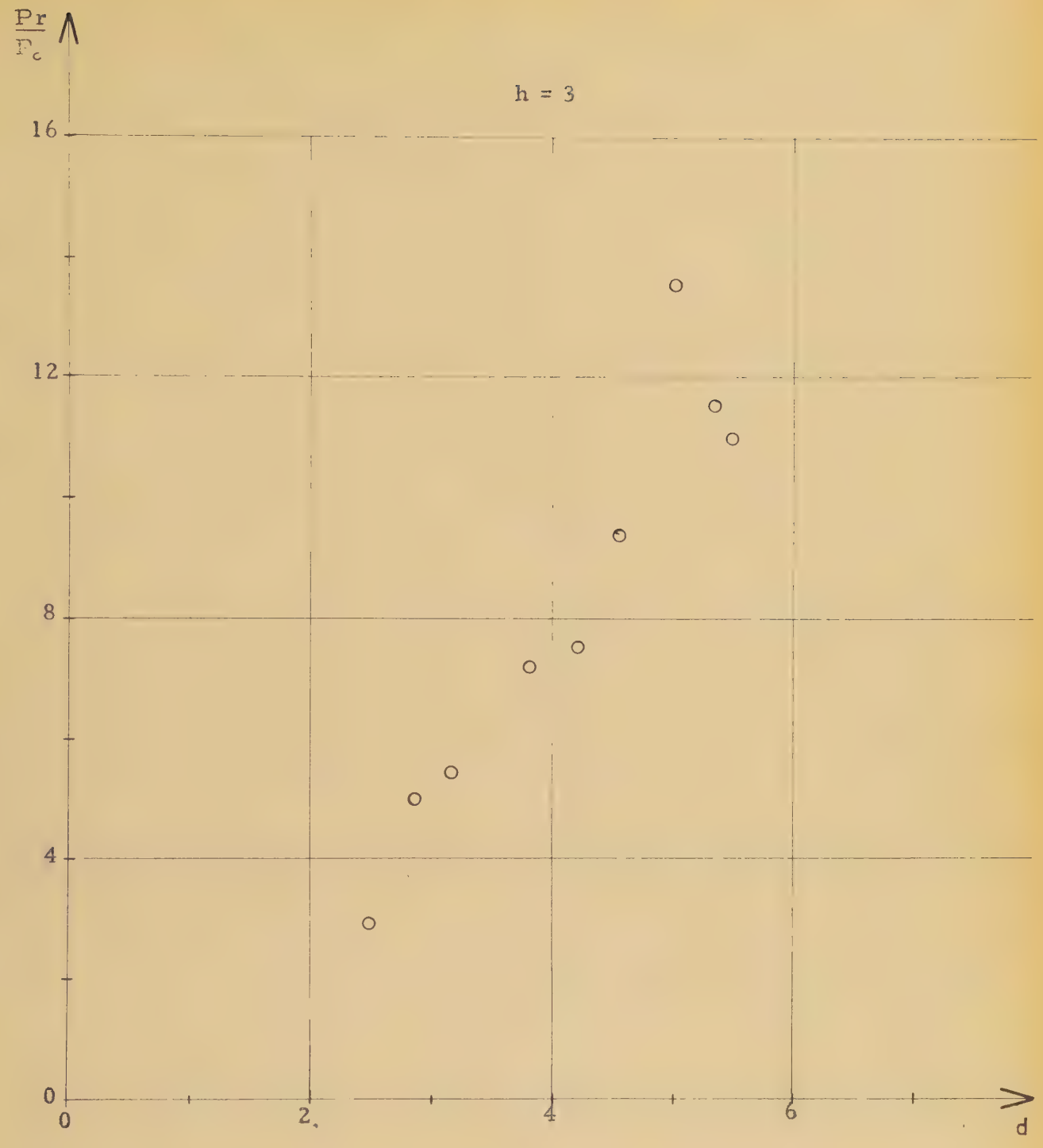
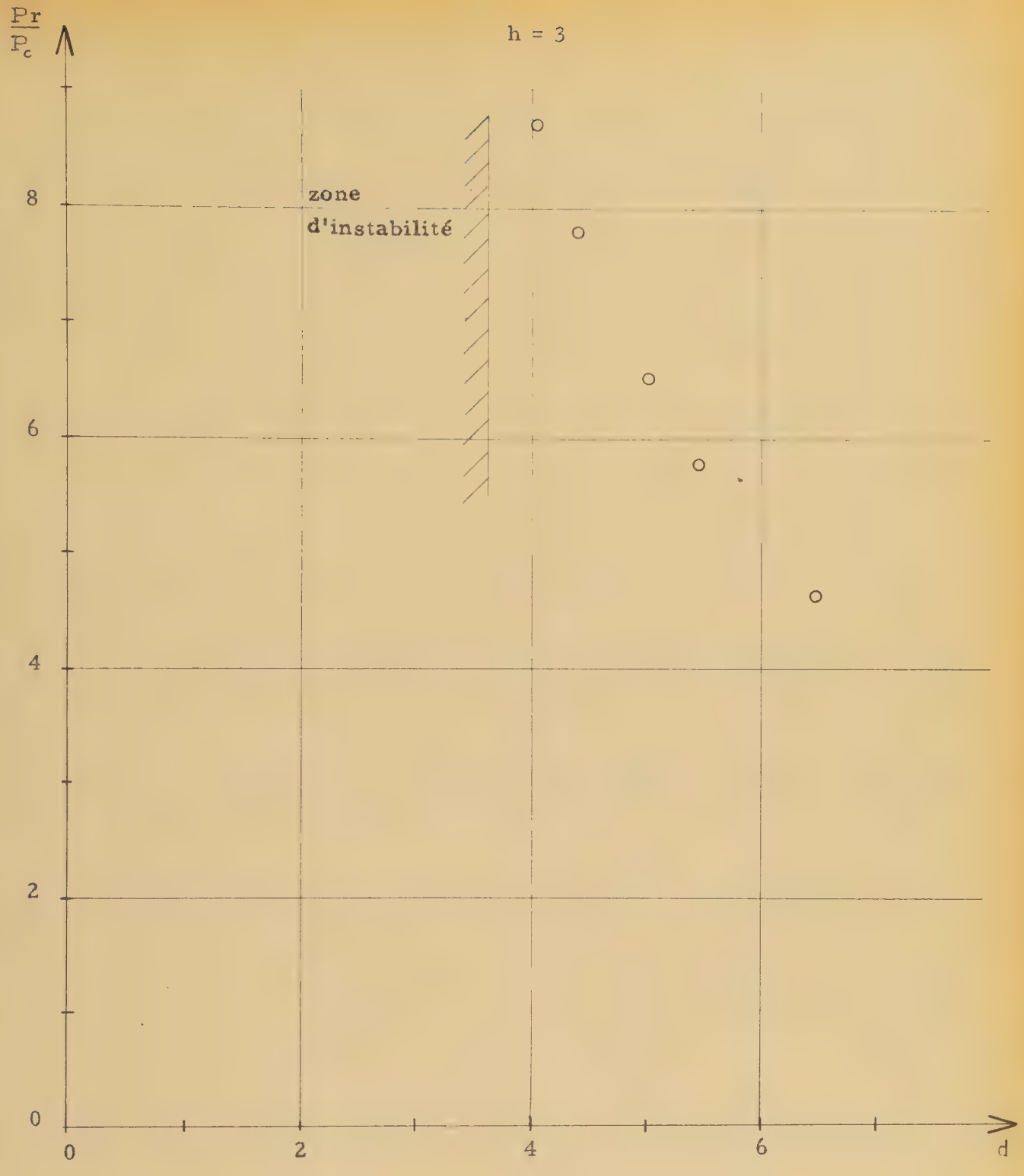

Pr
d
x = 5, 50
o = 5,06
Δ = 4, 45
60
40
20
0
0
5
10
h = 3
d
o = 6, 51
Δ = 4, 11
0
5
10
d
x = 2,
o = 2,
0
5
10
Recepteur 2

FIGURE_7



Récepteur 1

FIGURE 8



Récepteur. 2

FIGURE_9

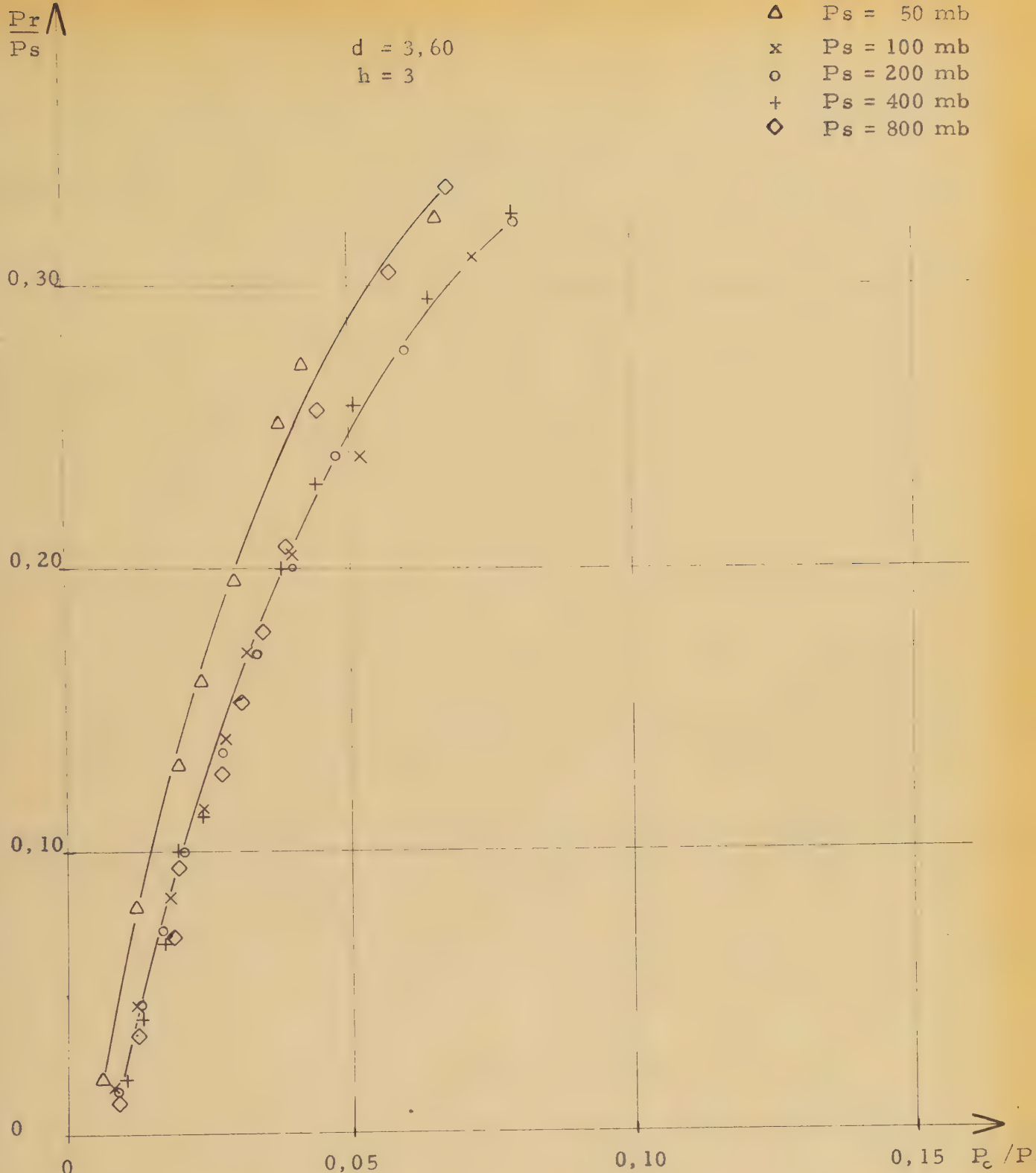

Pr/Ps
d = 3,60
h = 3
Δ Ps = 50 mb
x Ps = 100 mb
o Ps = 200 mb
+ Ps = 400 mb
◇ Ps = 800 mb
0,30
0,20
0,10
0
0
0,05
0,10
0,15
Pc/P

FIGURE_10

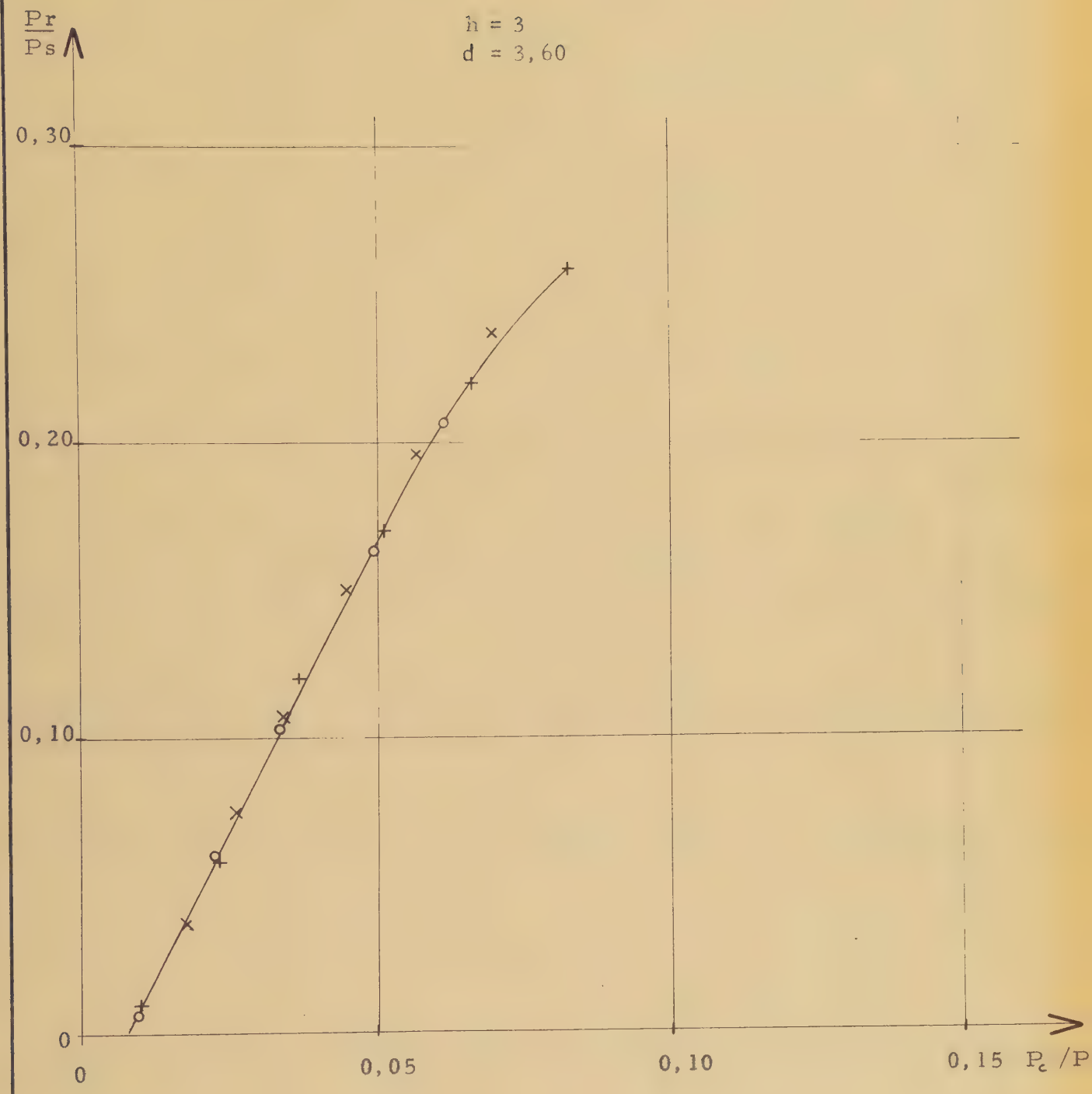

+ Ps = 60 mb
o Ps = 100 mb
× Ps = 200 mb
Pr/Ps
h = 3
d = 3,60
0,30
0,20
0,10
0
0
0,05
0,10
0,15 Pc/Ps

FIGURE_11

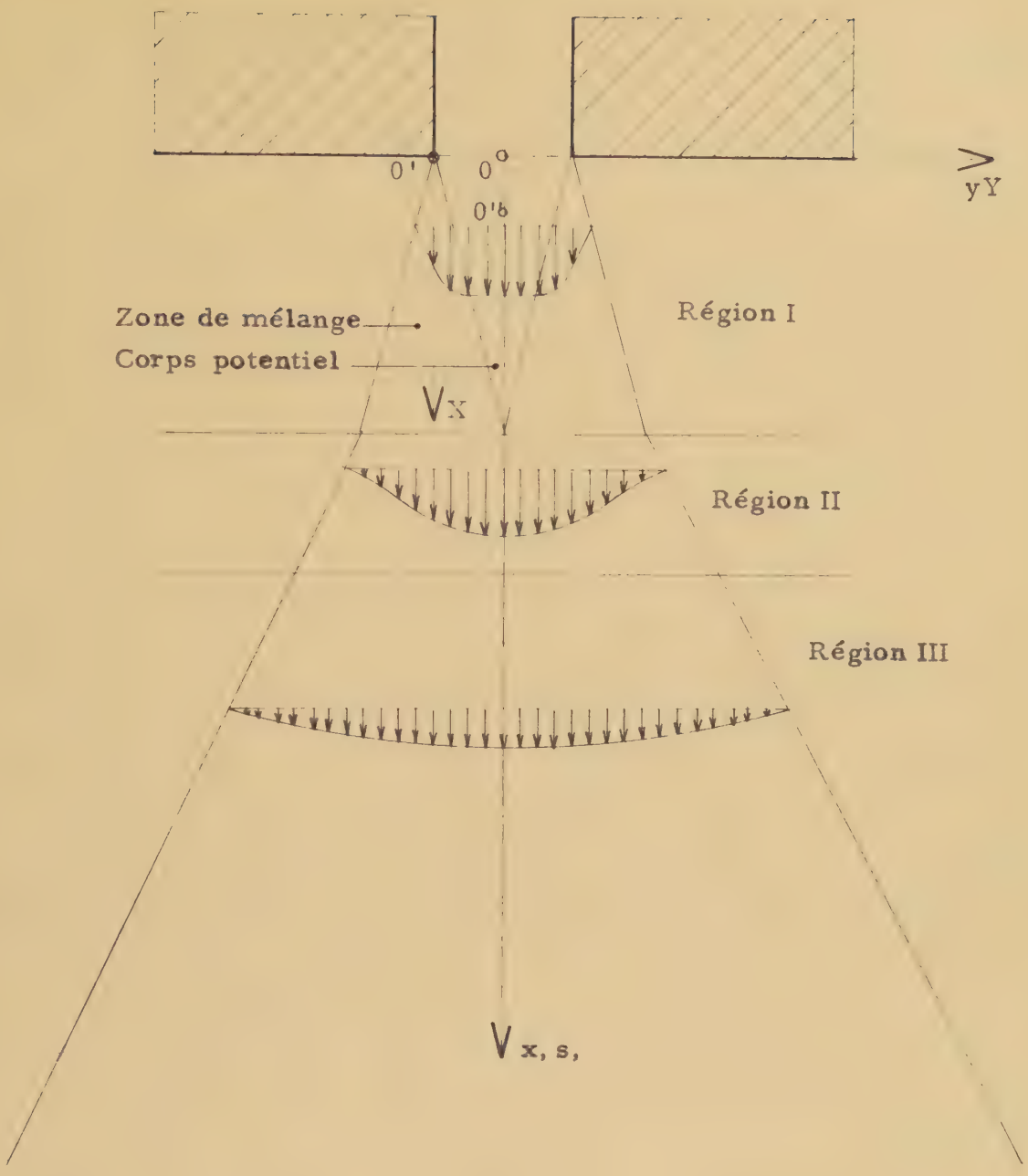

0'
0°
0'b
yY
Zone de mélange
Corps potentiel
Vx
Région I
Région II
Région III
Vx, s,

FIGURE_12

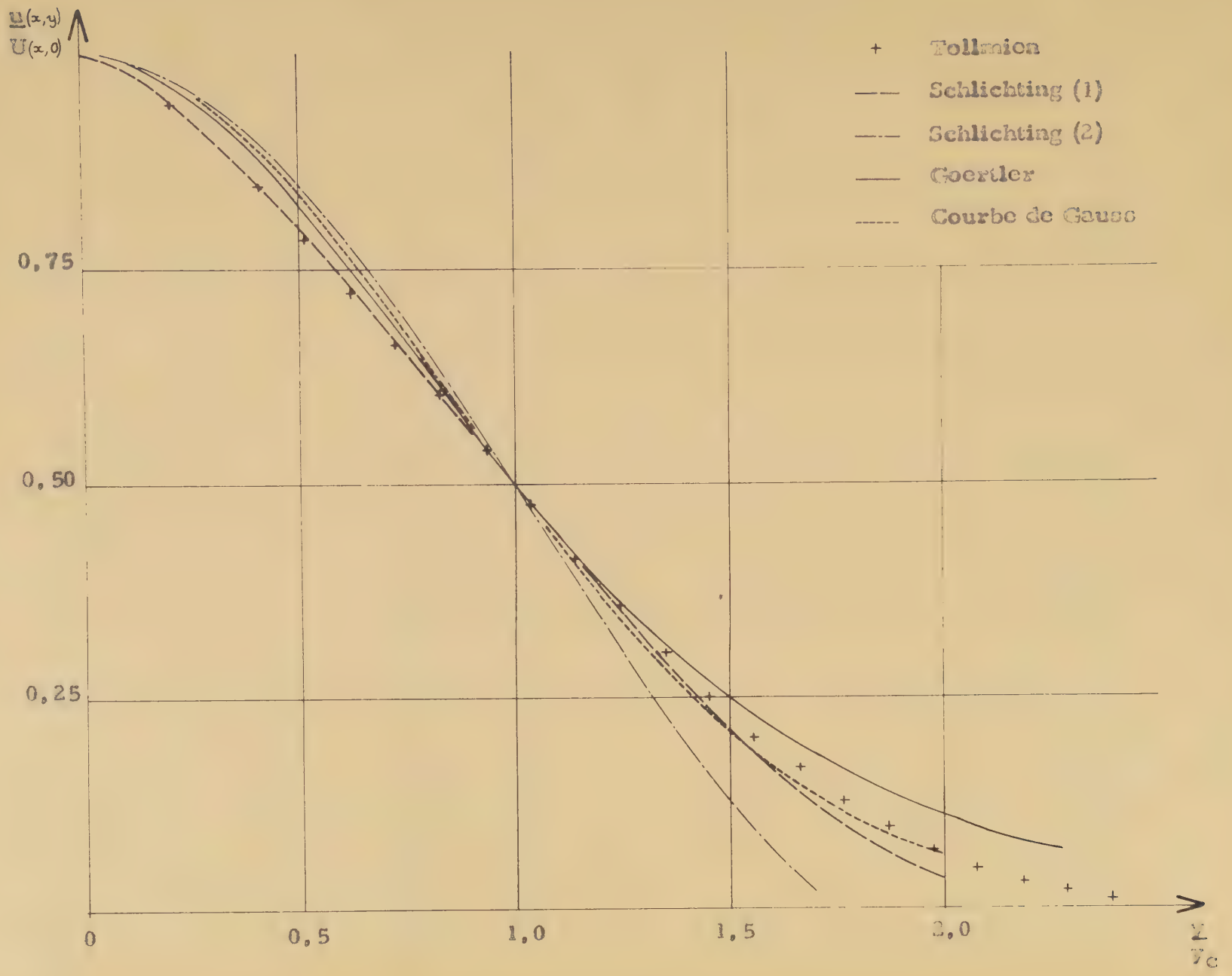

u(x,y)
U(x,0)
+ Tollmien
Schlichting (1)
Schlichting (2)
Goertler
Courbe de Gauss
0,75
0,50
0,25
0
0,5
1,0
1,5
2,0
y
yc

FIGURE_13

TABLEAU DES VALEURS

DES DIFFERENTS PROFILS $\frac{u(x,y)}{U(x)}$

	Profil de Goertler	Profil de Schlichting	Profil de Schlichting	Profil de Tollmien	Courbes de Gauss
	$1-th^2\eta$	$(1-\eta^{3/2})^2$	$1-[1-(1-\eta)^{3/2}]^2$		$e^{-\frac{\eta^2}{4}}$
0	1	1	1	1	1
0,1	0,992	0,982	0,993	0,980	0,993
0,2	0,970	0,948	0,974	0,945	0,977
0,3	0,933	0,906	0,942	0,901	0,940
0,4	0,885	0,857	0,900	0,851	0,895
0,5	0,828	0,804	0,849	0,796	0,841
0,6	0,765	0,746	0,790	0,739	0,779
0,7	0,699	0,686	0,724	0,679	0,712
0,8	0,631	0,625	0,653	0,619	0,641
0,9	0,564	0,562	0,578	0,559	0,571
1,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
1,1	0,440	0,438	0,421	0,442	0,432
1,2	0,384	0,378	0,342	0,387	0,369
1,3	0,334	0,320	0,265	0,334	0,310
1,4	0,288	0,265	0,193	0,284	0,257
1,5	0,248	0,213	0,126	0,238	0,210
1,6	0,212	0,166	0,068	0,195	0,178
1,7	0,181	0,123	0,022	0,156	0,135
1,8	0,154	0,086	-	0,121	0,106
1,9	0,131	0,054	-	0,090	0,082
2,0	0,111	0,029	-	0,064	0,062

FIGURE_14

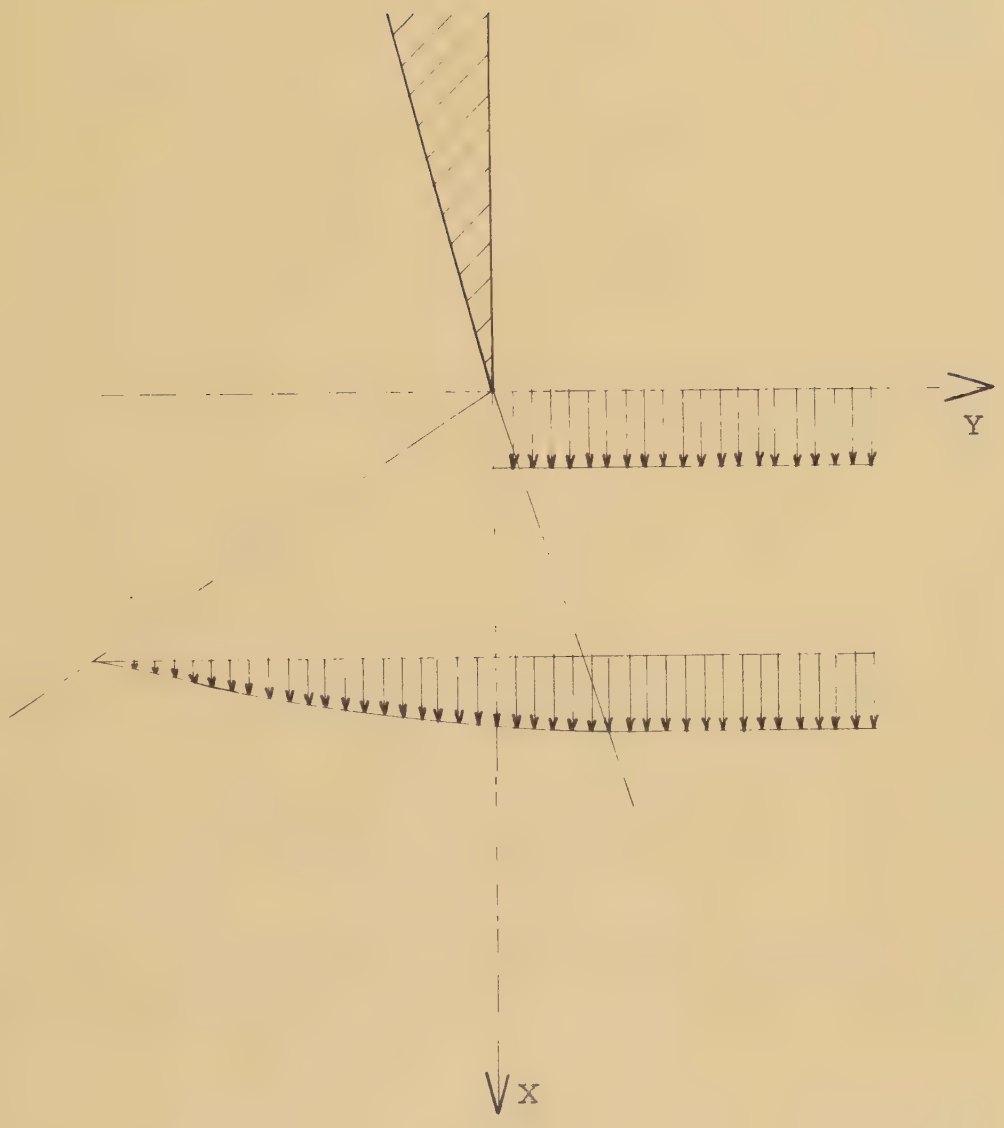


FIGURE_15

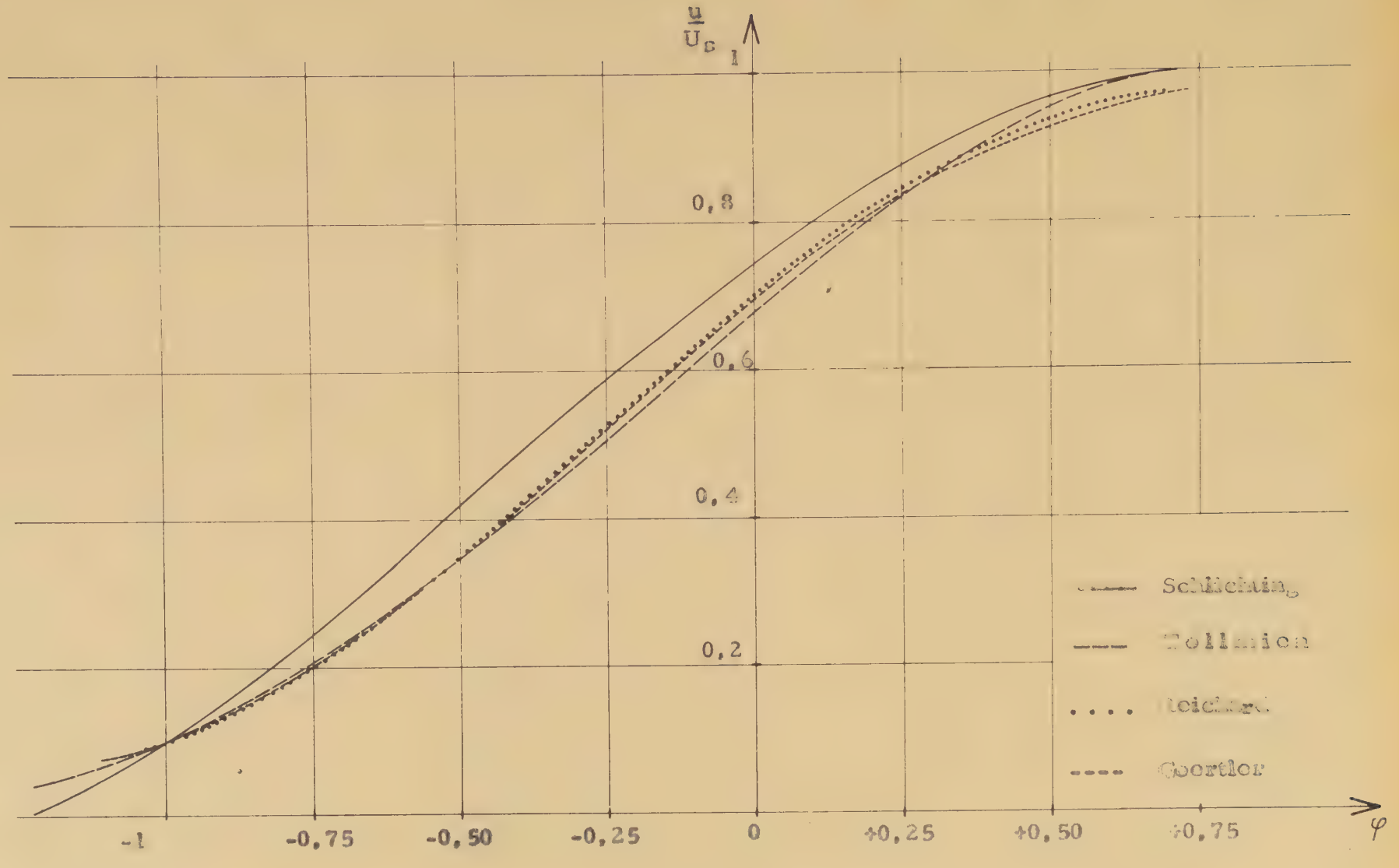

u/Uc
1
0,8
0,6
0,4
0,2
-1
-0,75
-0,50
-0,25
0
+0,25
+0,50
+0,75
φ
Schlichting
Tollmien
Reichardt
Goertler

FIGURE_16

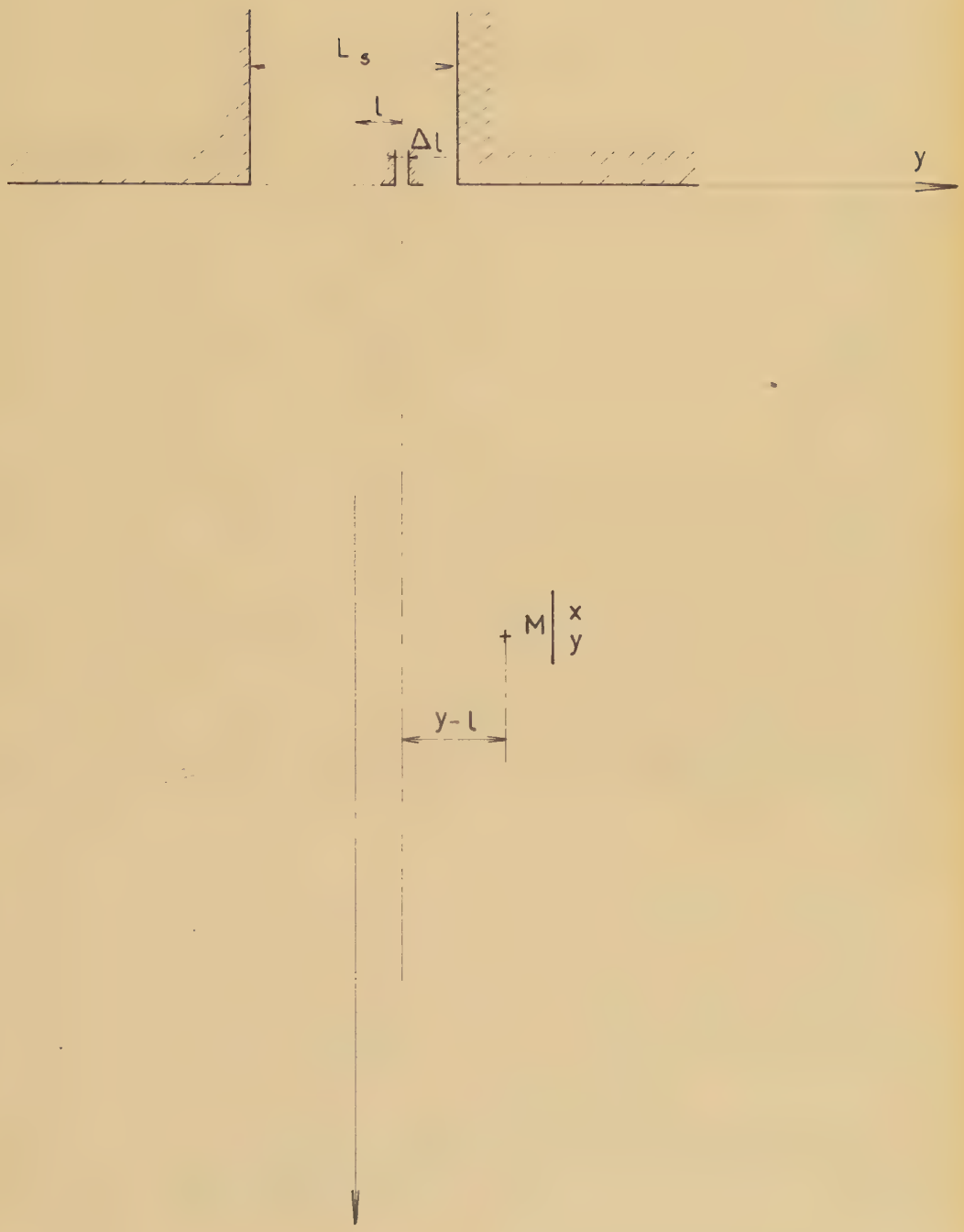


FIGURE_17

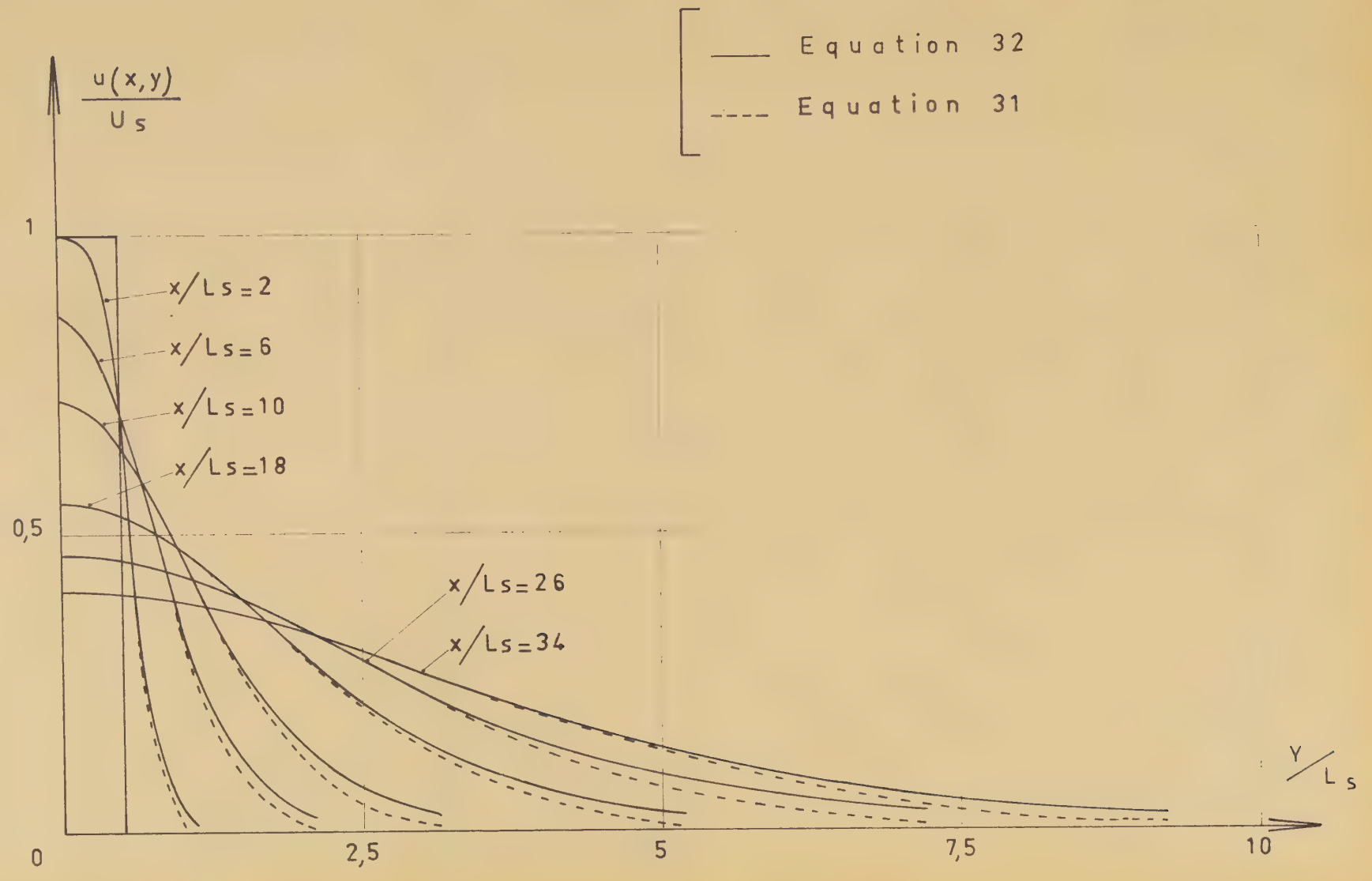

Equation 32
Equation 31
u(x,y) / Us
1
0,5
0
x/Ls=2
x/Ls=6
x/Ls=10
x/Ls=18
x/Ls=26
x/Ls=34
2,5
5
7,5
10
Y/Ls

FIGURE_18a

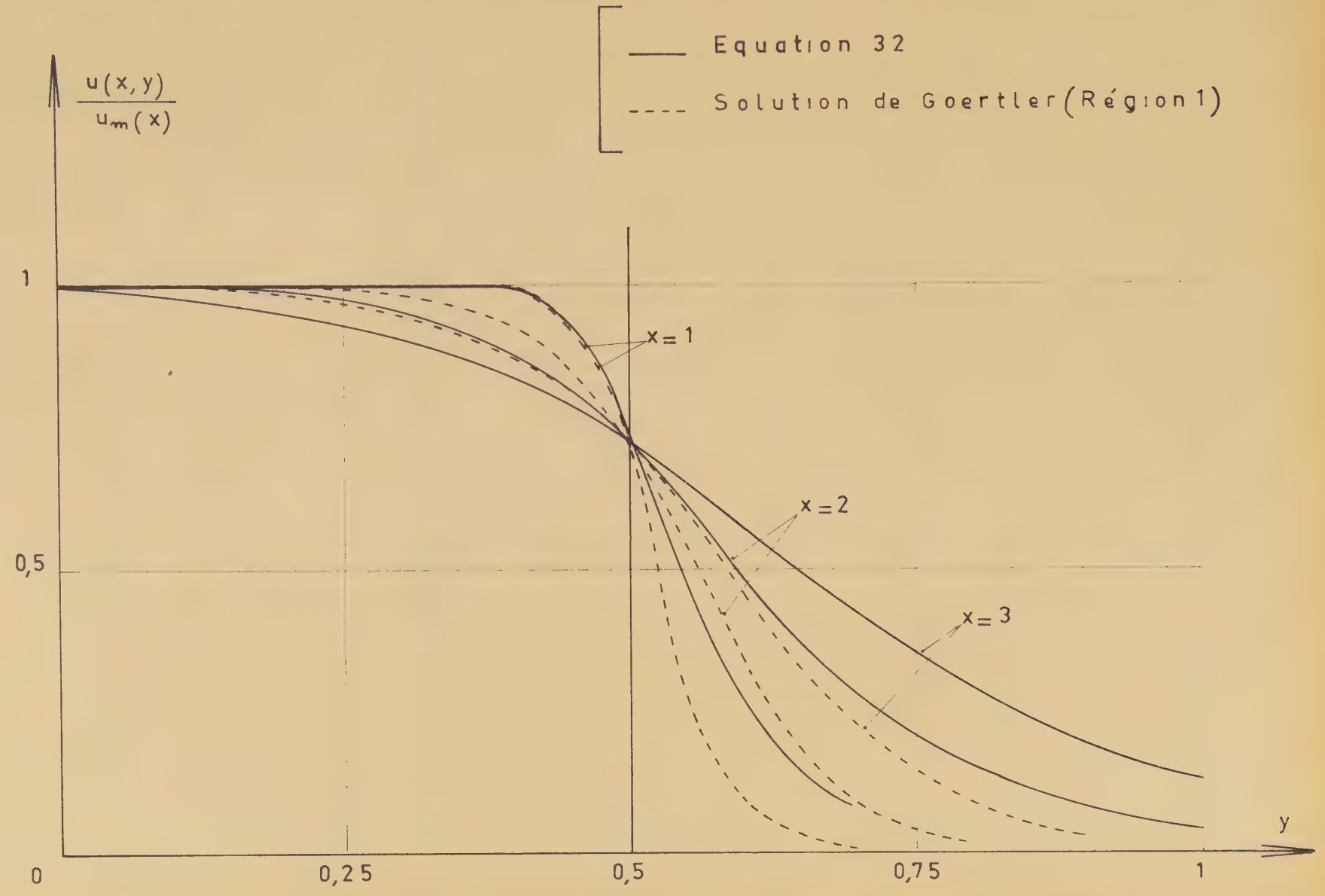

Equation 32
Solution de Goertler (Région 1)
u(x, y) / u_m(x)
1
0,5
0
0,25
0,5
0,75
1
y
x = 1
x = 2
x = 3

FIGURE_18b

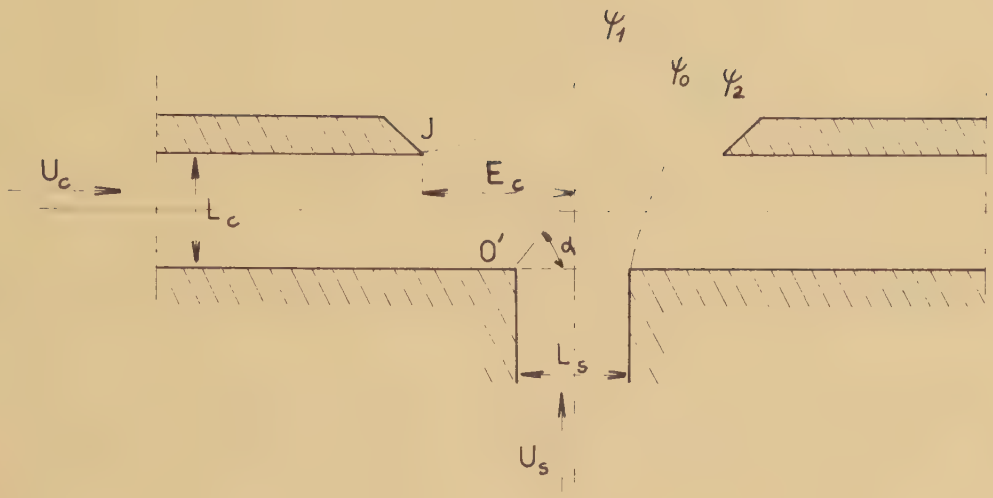


FIGURE_19a

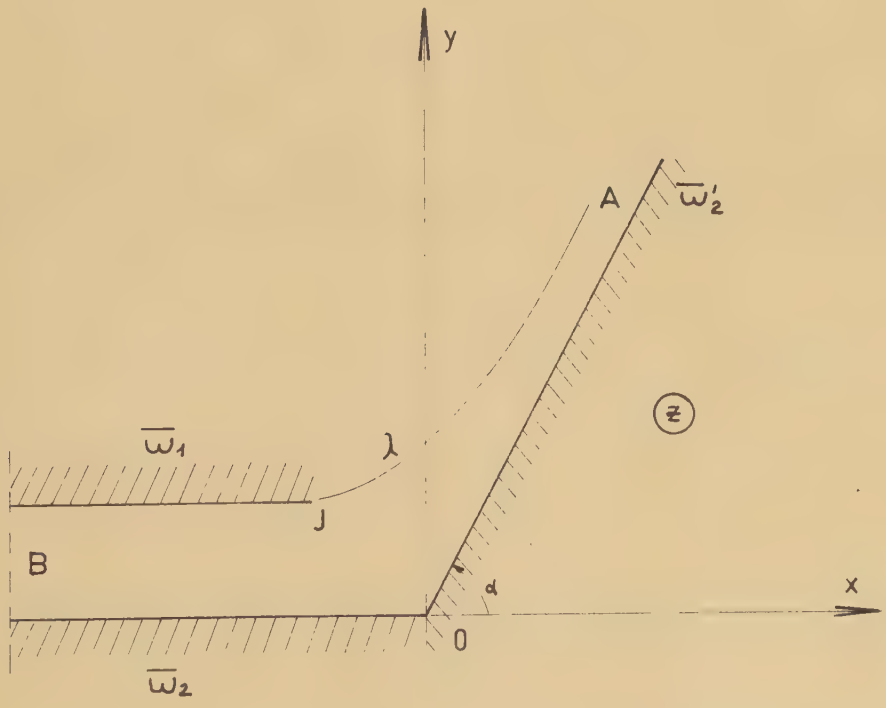


FIGURE_19b

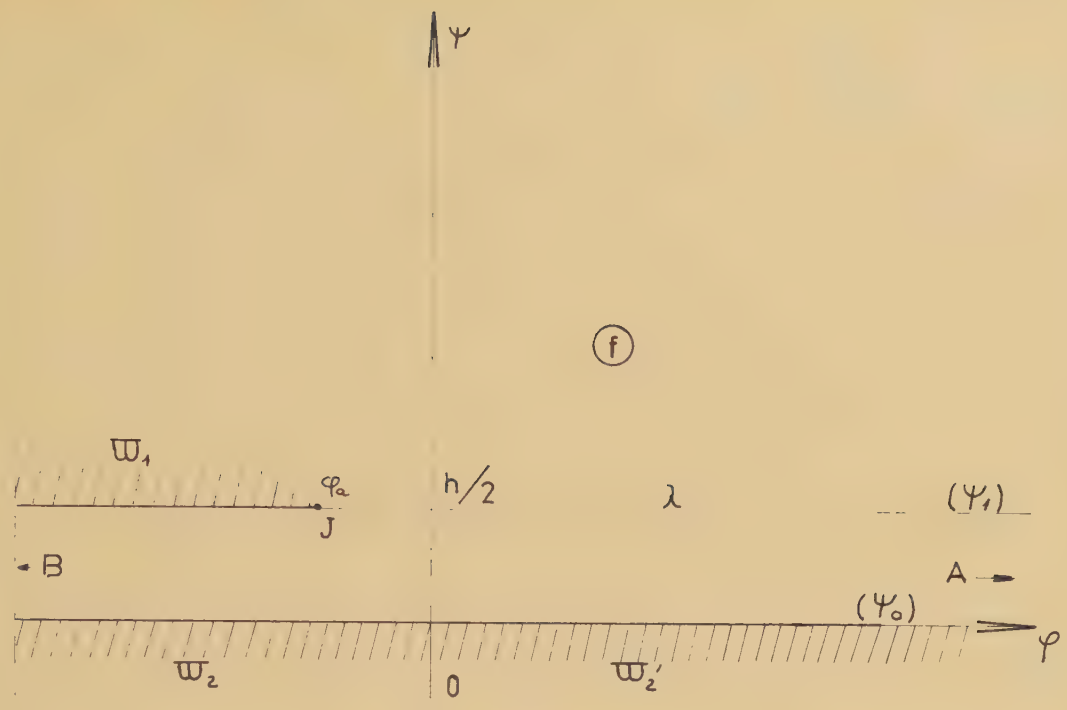


FIGURE_20a

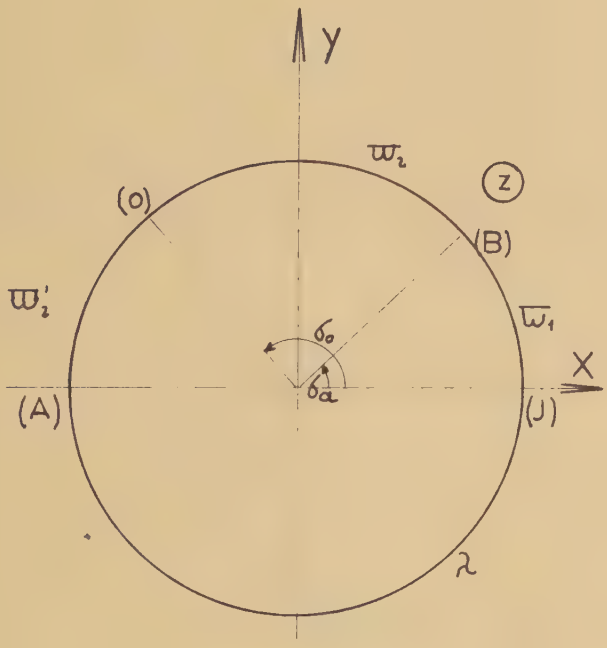


FIGURE_20b

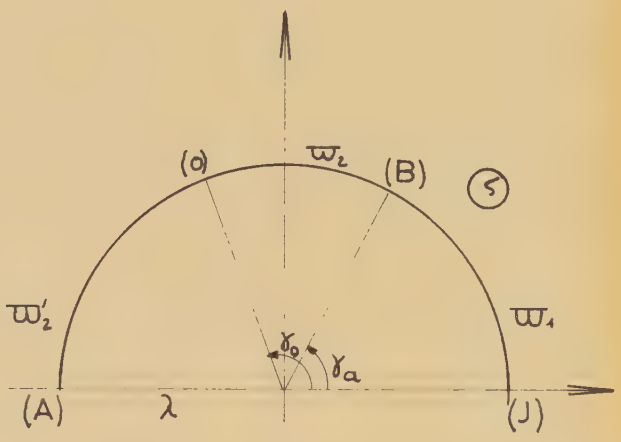


FIGURE_20c

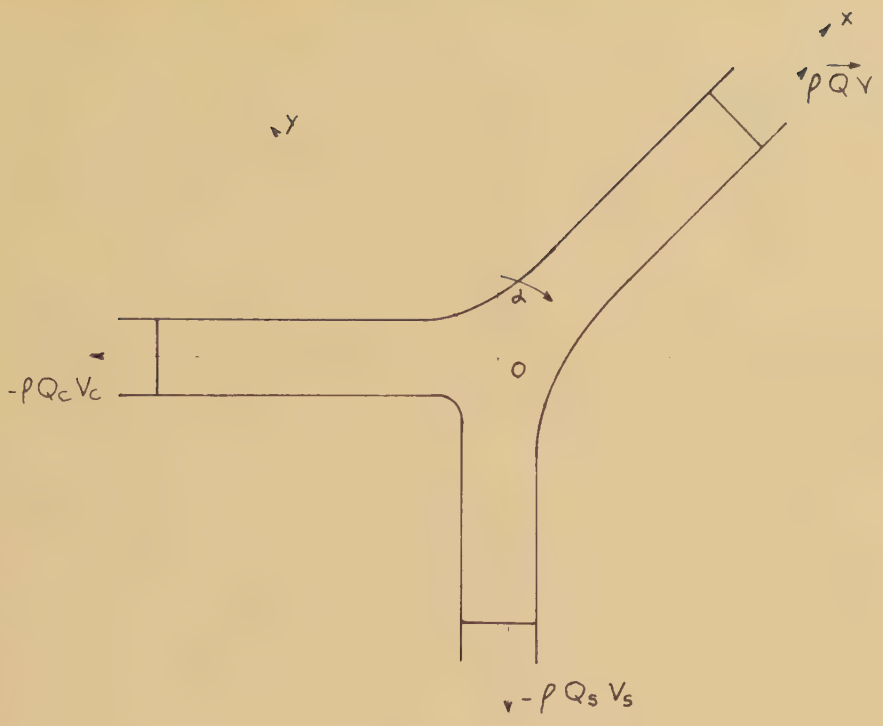


FIGURE_20 d

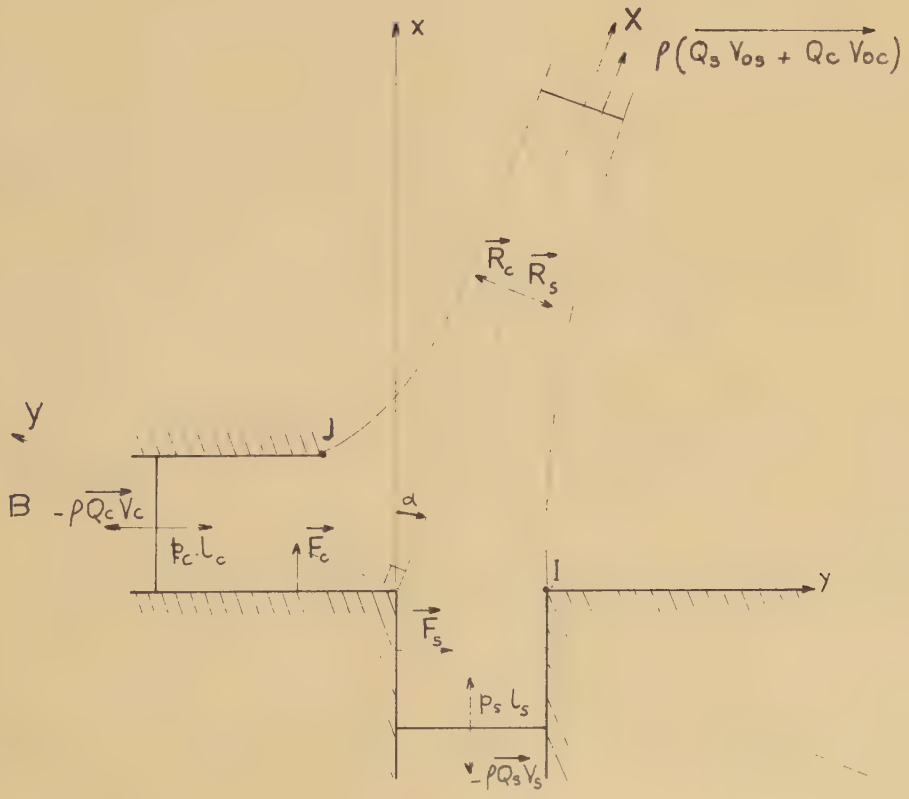


FIGURE_20 e

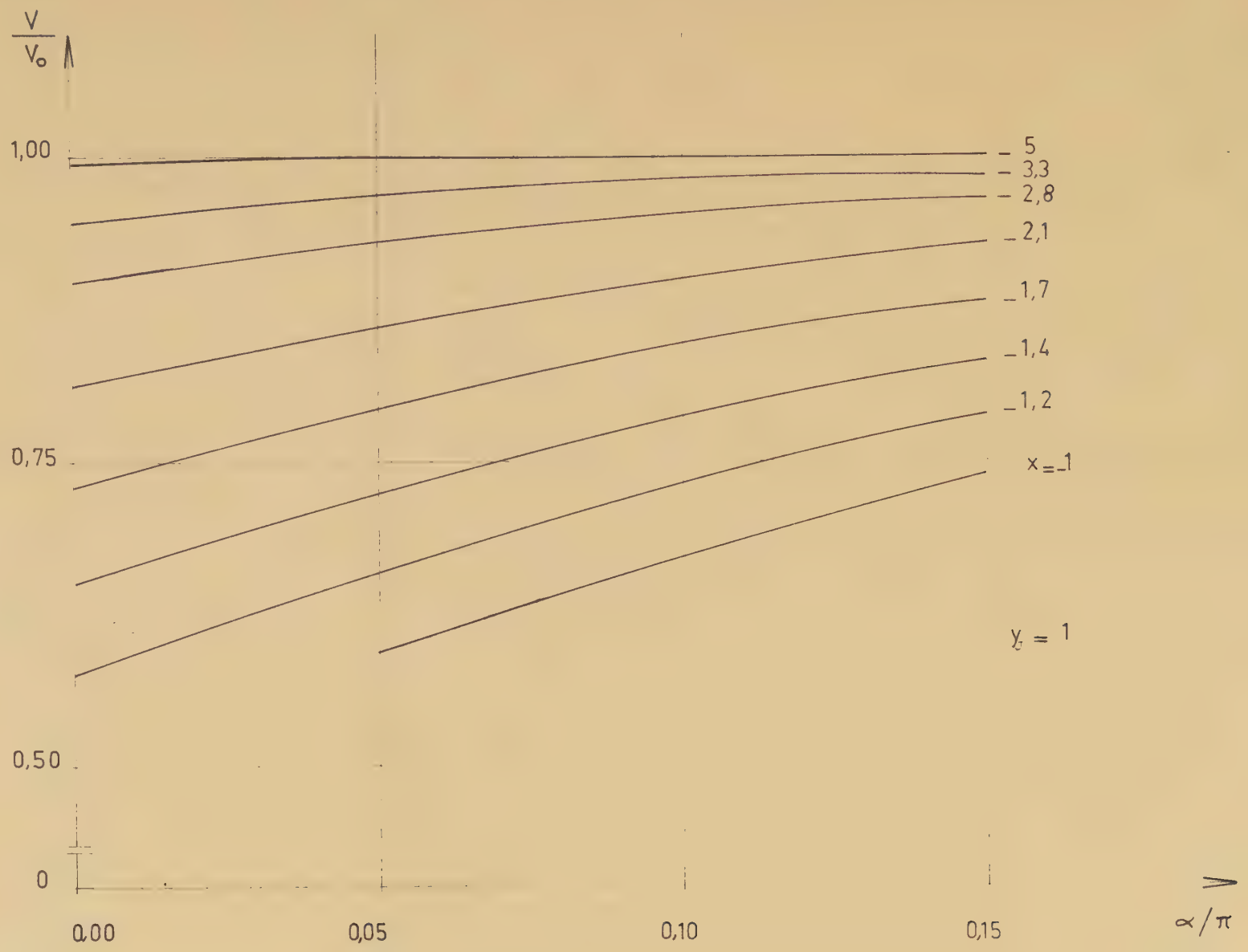


FIGURE _ 21a

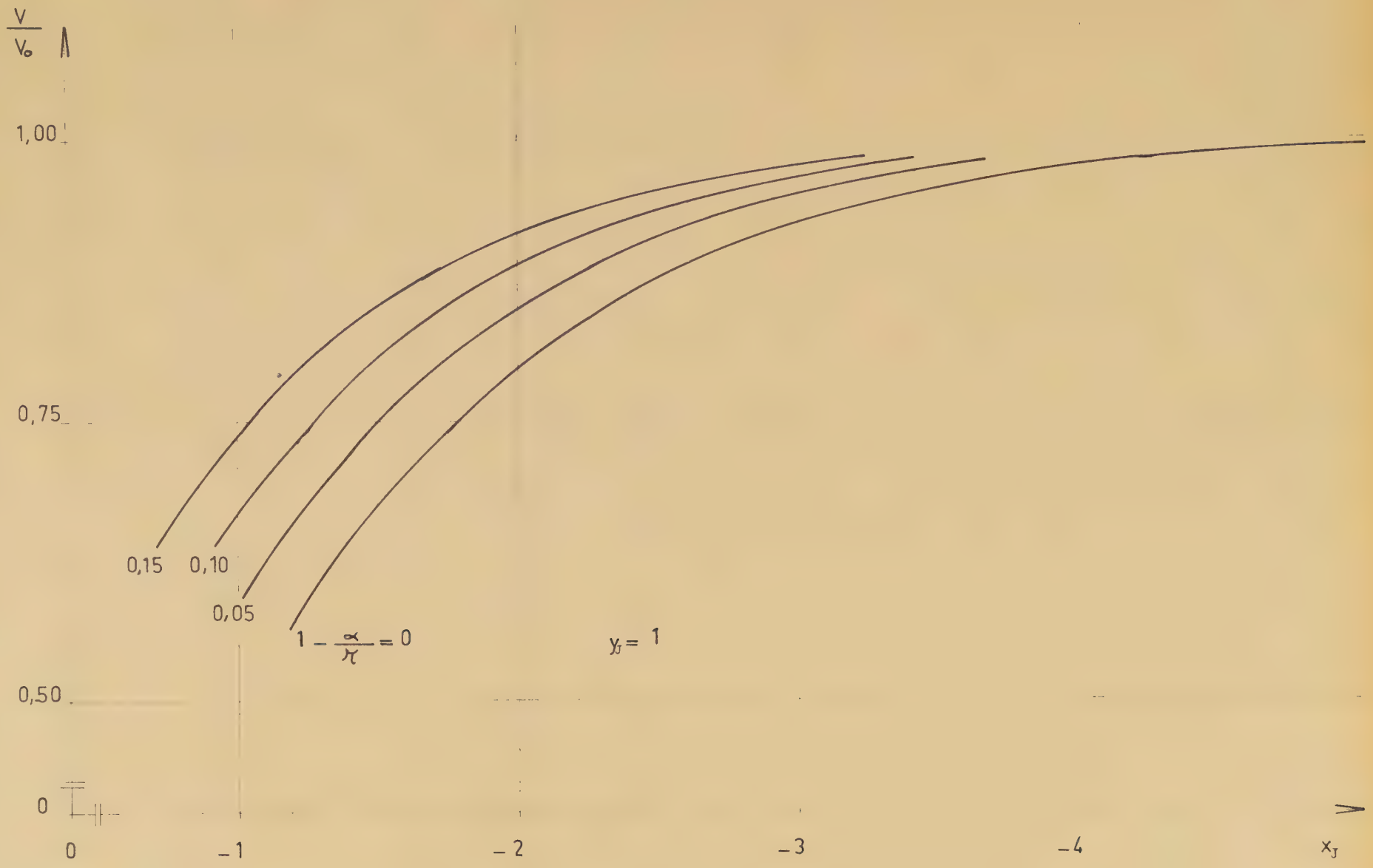


FIGURE _ 21 b

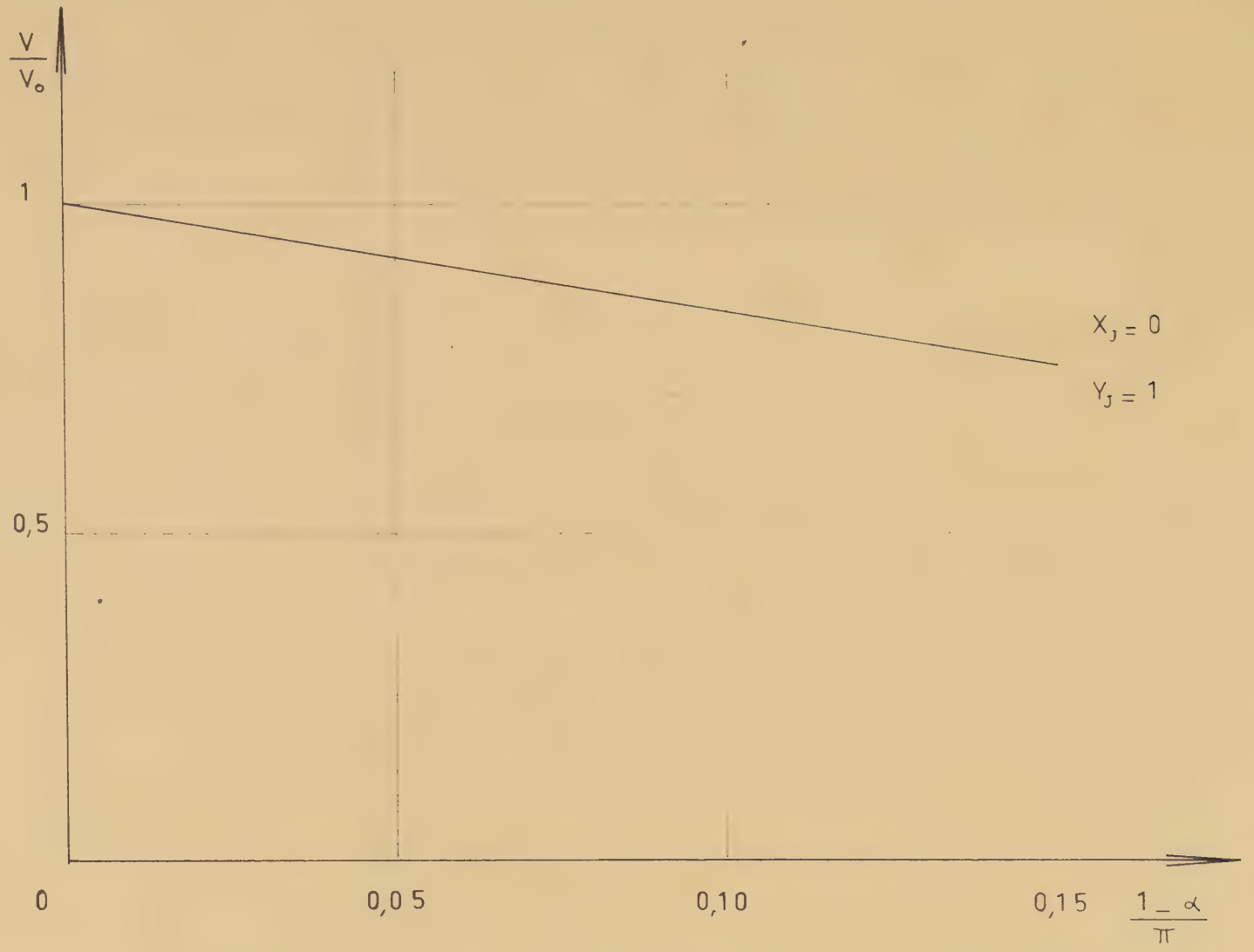


FIGURE_21c

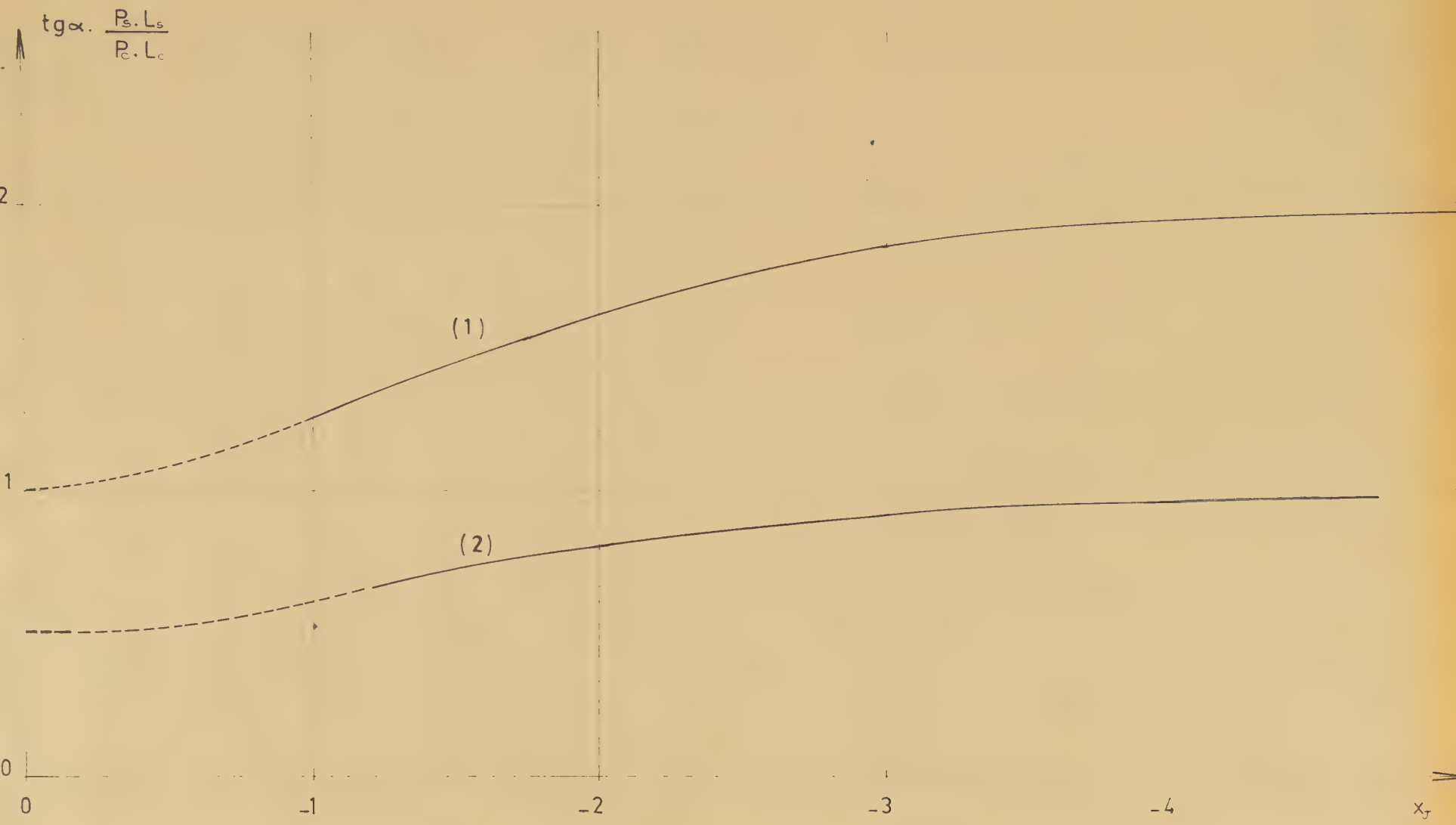


FIGURE _ 21d

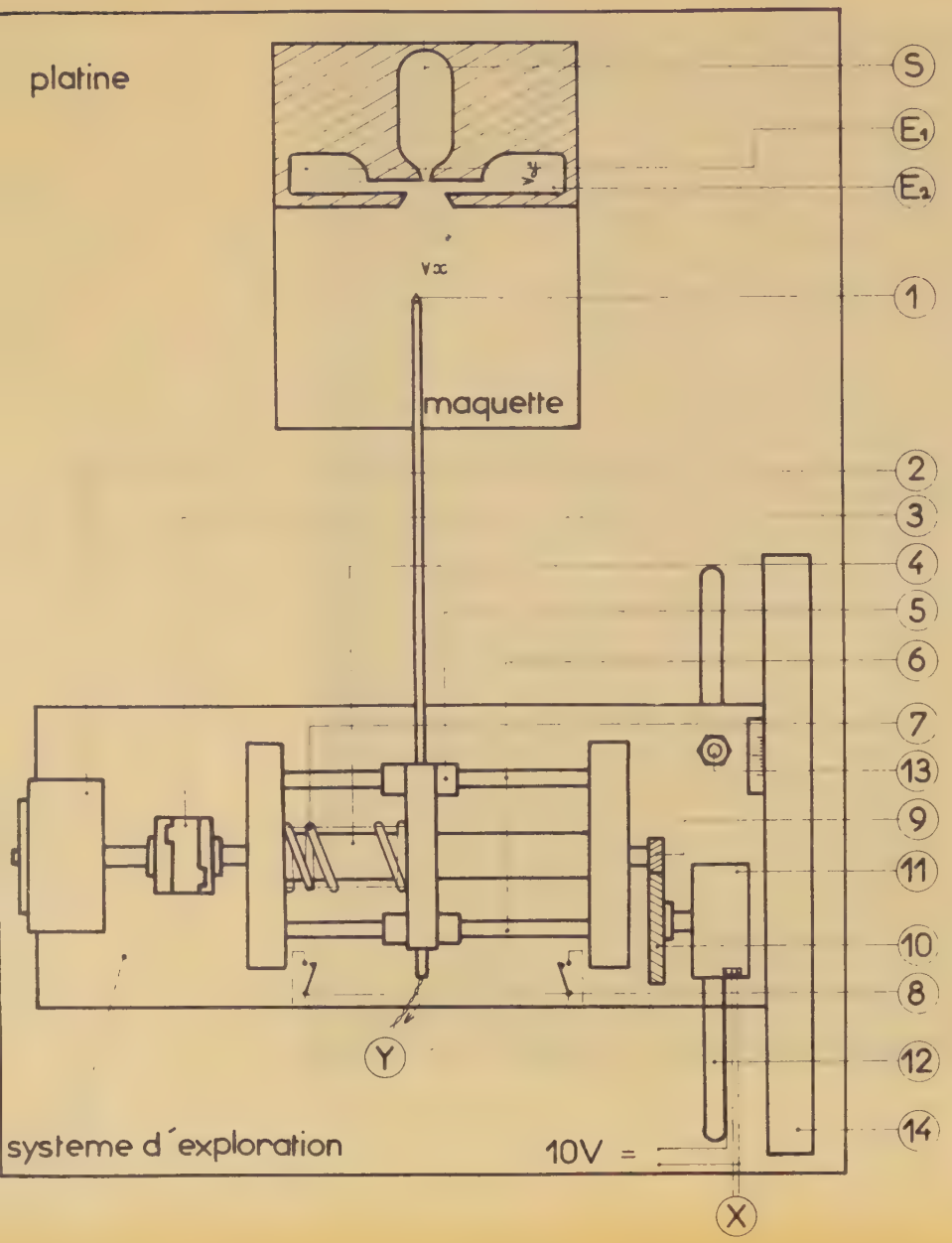
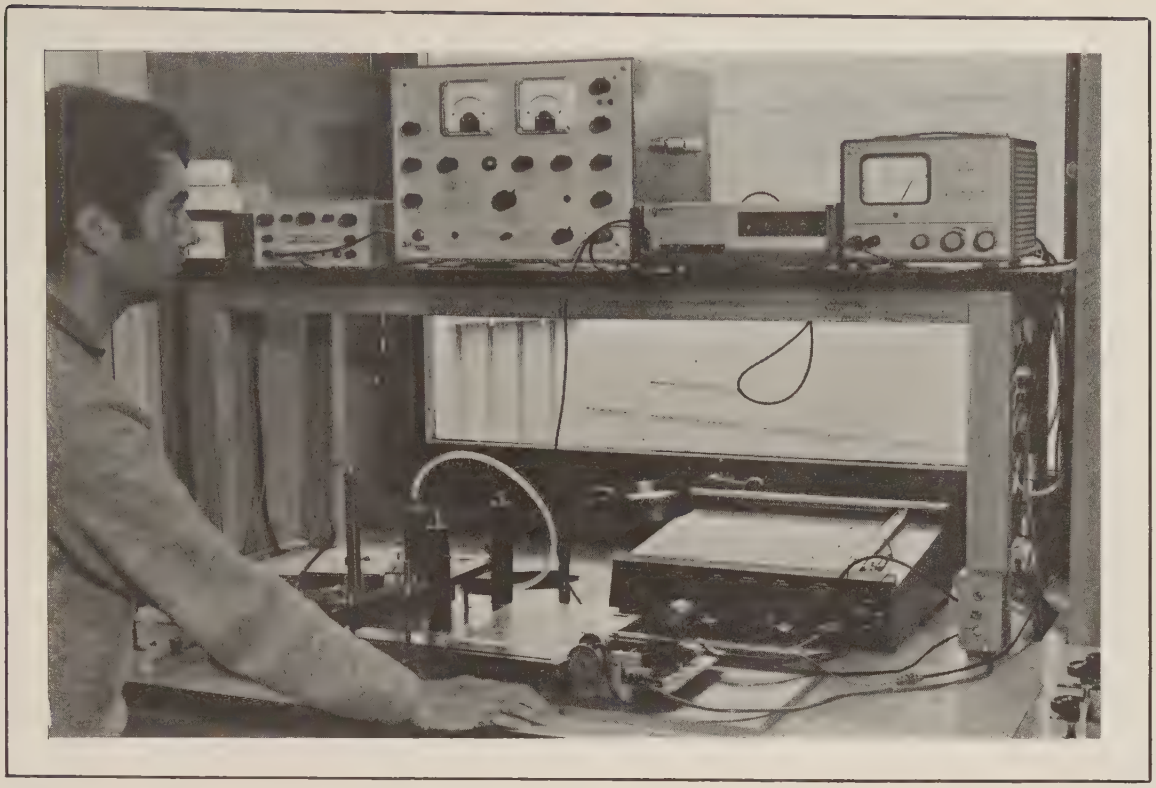


FIG_ 22

14	Regle de guidage longitudinal
13	Boulon de blocage
12	Rainure à té de blocage
11	Potentiometre 10 tours
10	Engrenage 120 dents
9	Engrenage 24 dents
8	Rupteurs de fin de course
7	Ressort anti-jeu
6	Tiges guides
5	Chariot de déplacement latéral
4	Vis sans fin pas 1mm
3	Accouplement souple
2	Moteur reducteur à deux sens de marche
1	Sonde
Y	Vers chaine de mesure de pression de vitesse
X	Vers déplacement X de la table traçante
S E1 E2	Alimentations en air comprimé



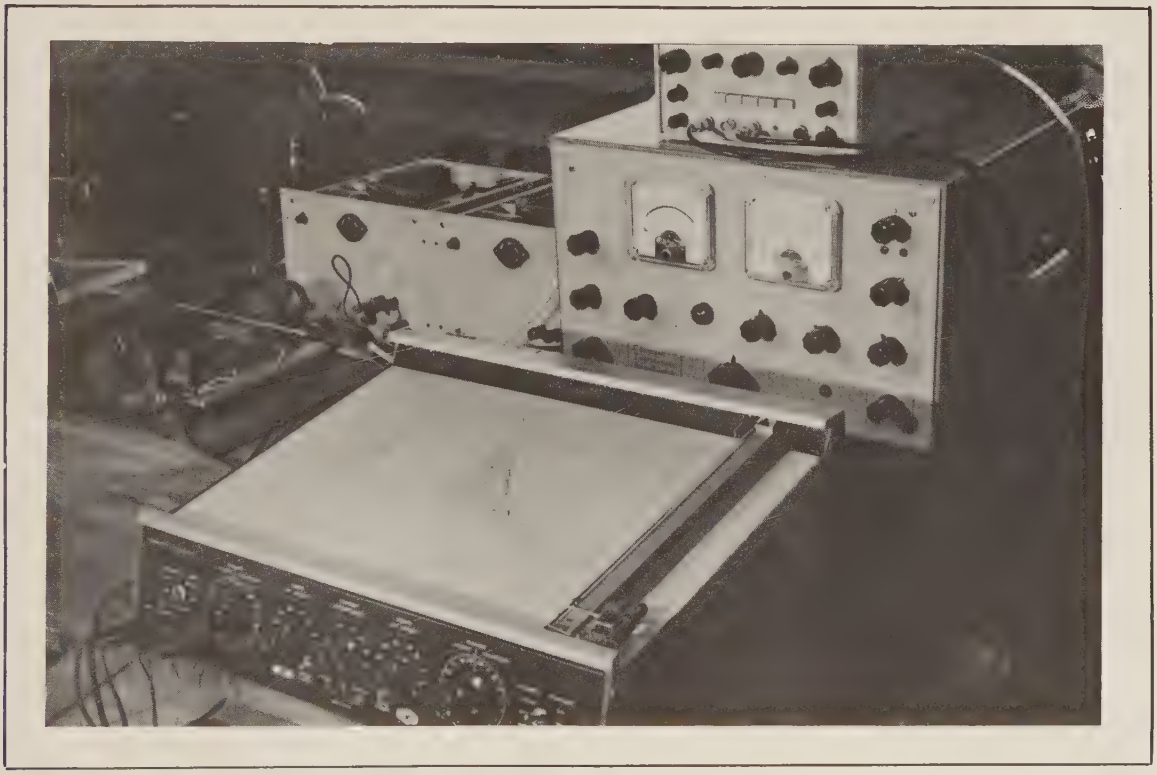


FIGURE_23

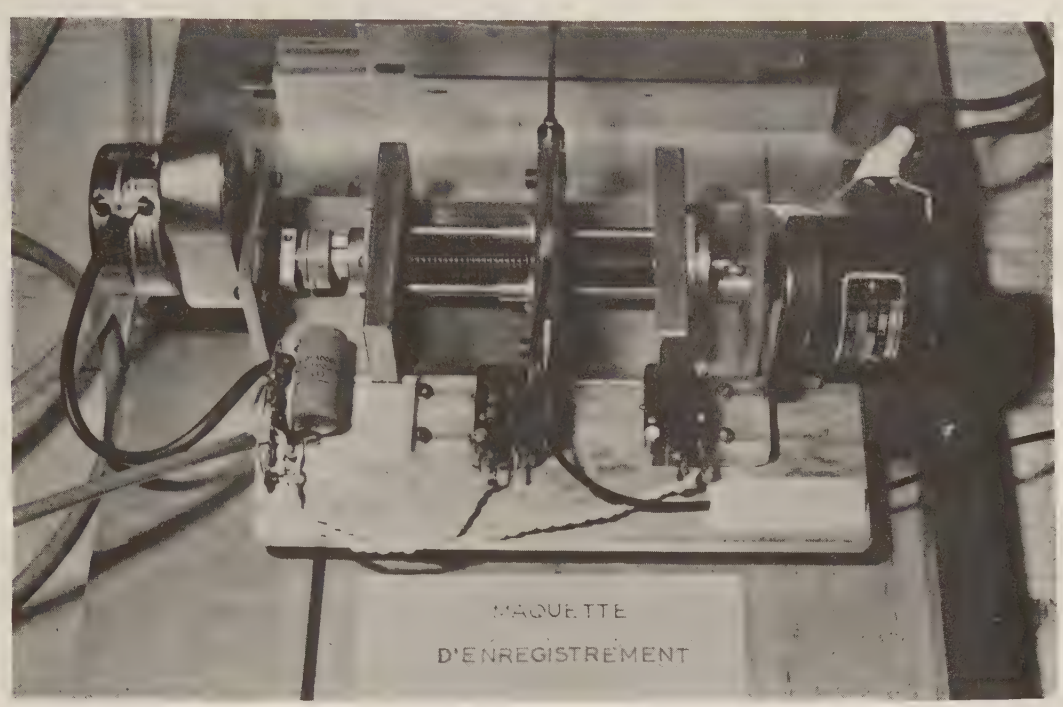


FIGURE_24

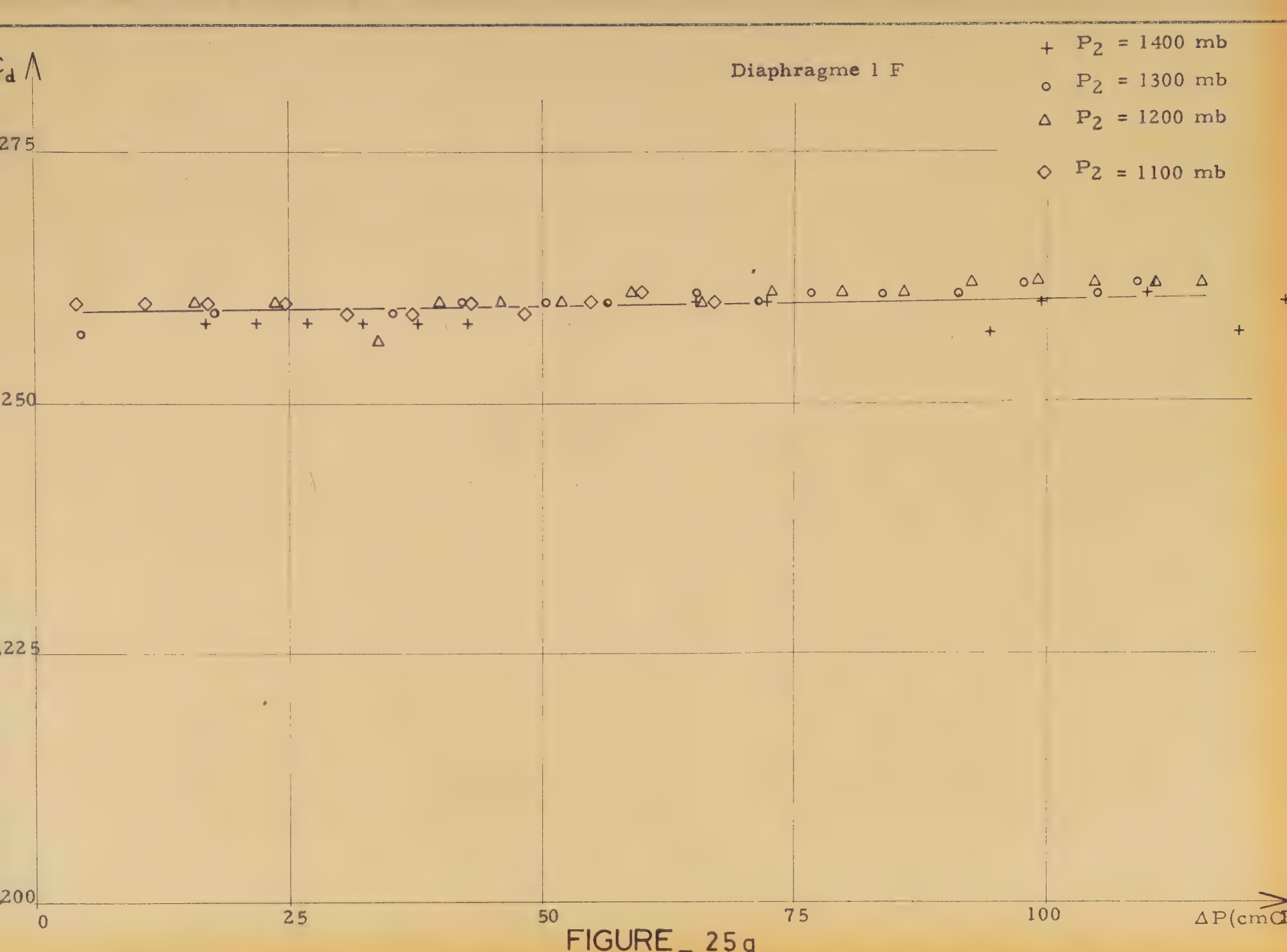

Diaphragme 1 F
+ P2 = 1400 mb
o P2 = 1300 mb
Δ P2 = 1200 mb
◇ P2 = 1100 mb
275
250
225
200
0
25
50
75
100
ΔP(cm

FIGURE_ 25a

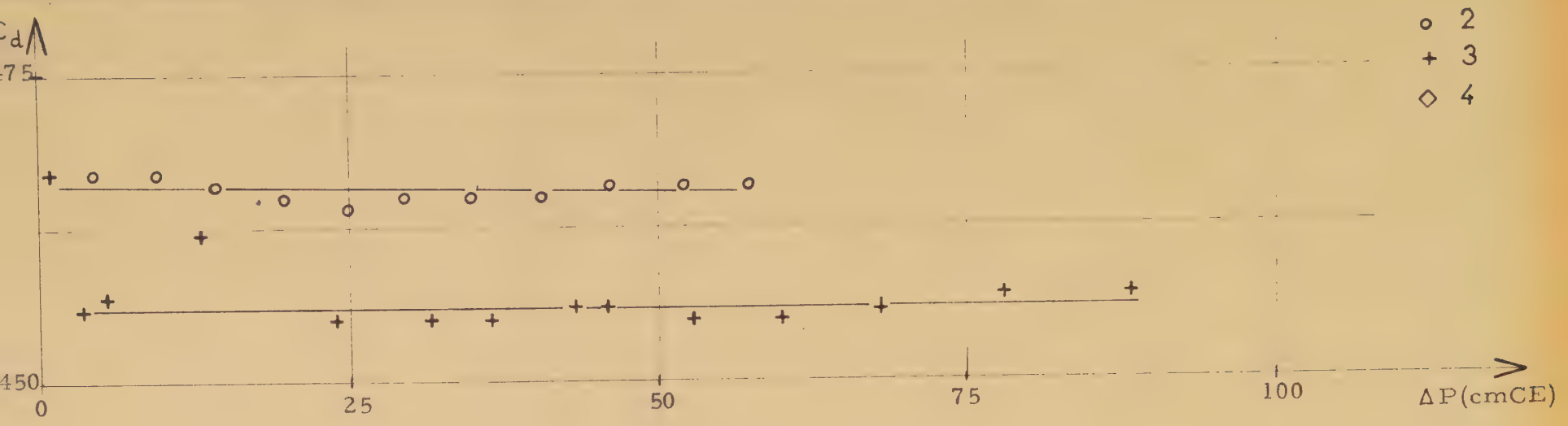
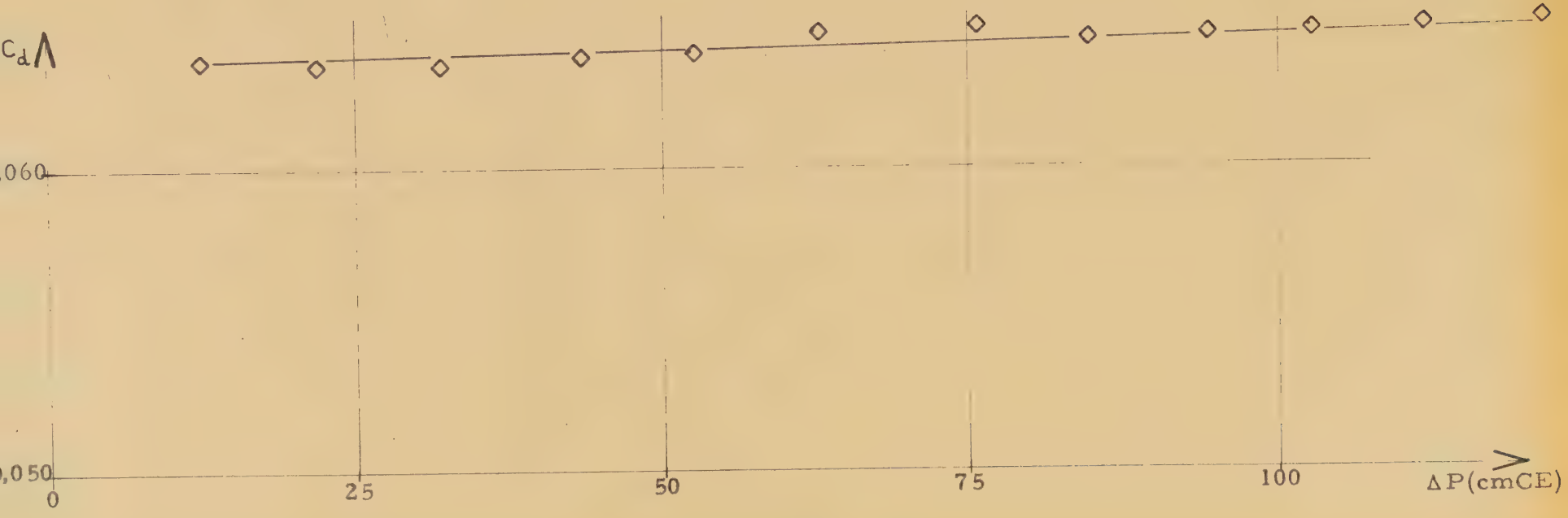


FIGURE_ 25 b



Diaphragmes 2F, 3F, 4F

FIGURE_ 25 c

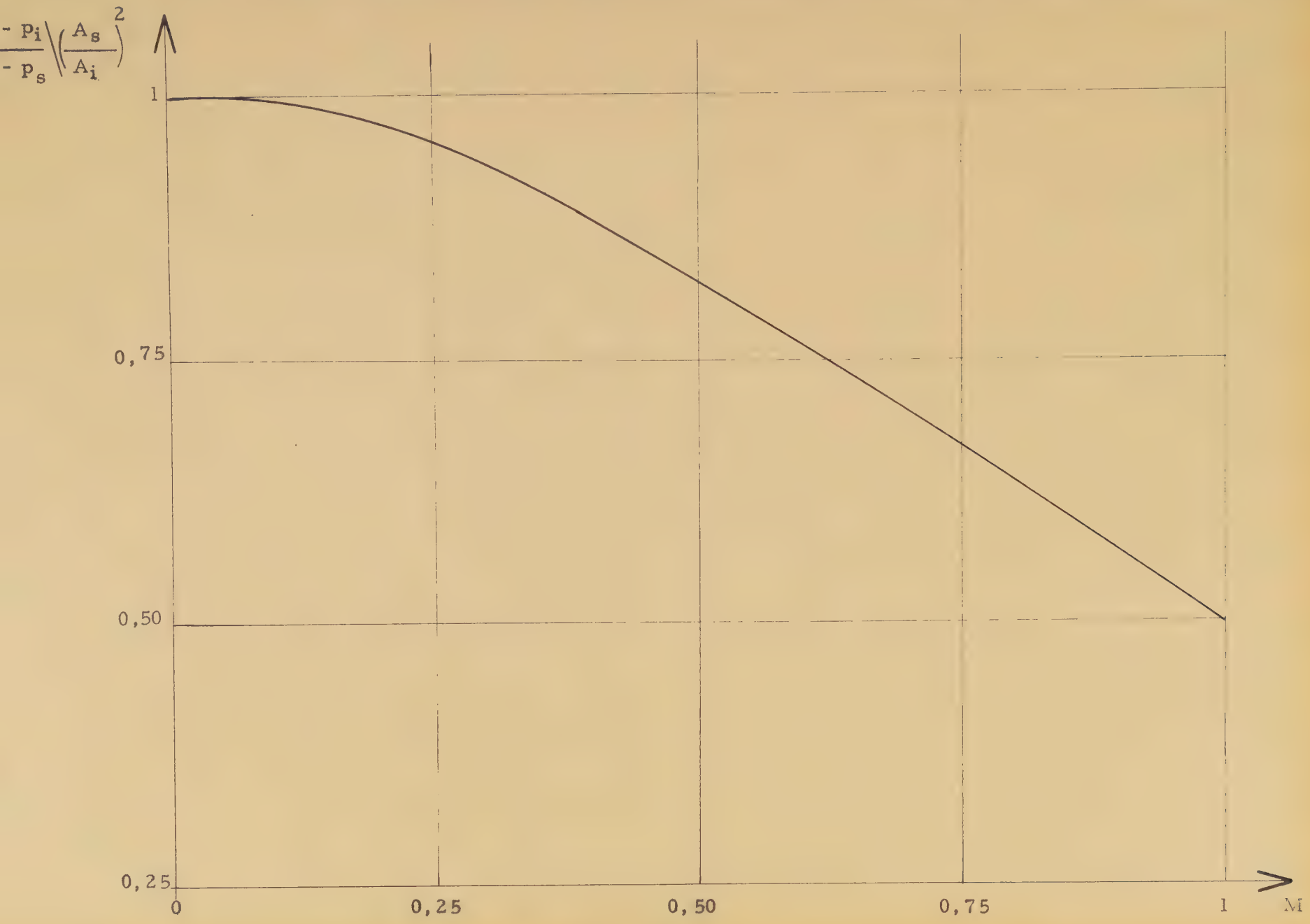


FIGURE_ 26

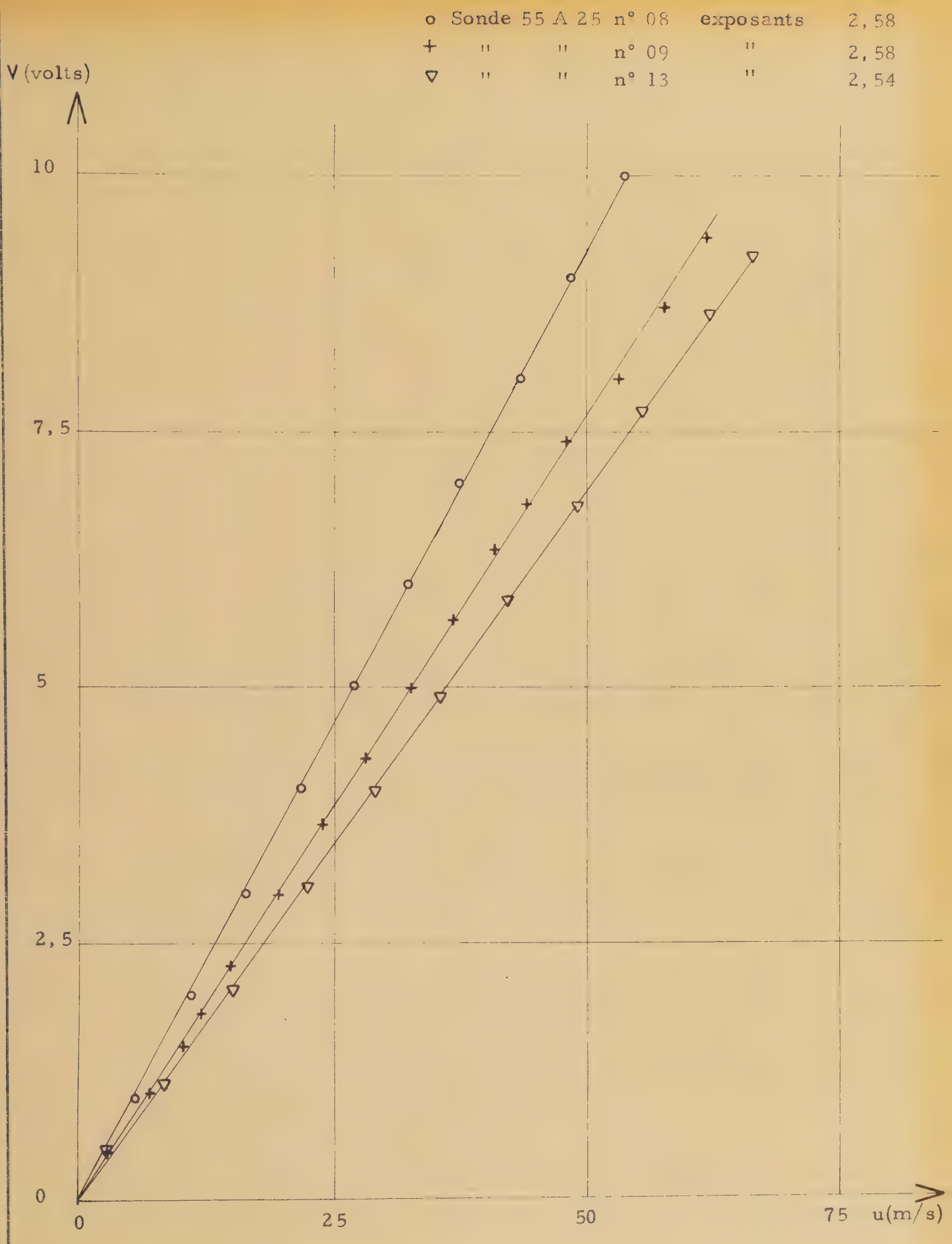

o Sonde 55 A 25 n° 08 exposants 2,58
+ " " n° 09 " 2,58
▽ " " n° 13 " 2,54
V (volts)
10
7,5
5
2,5
0
0
25
50
75
u(m/s)

FIGURE_27

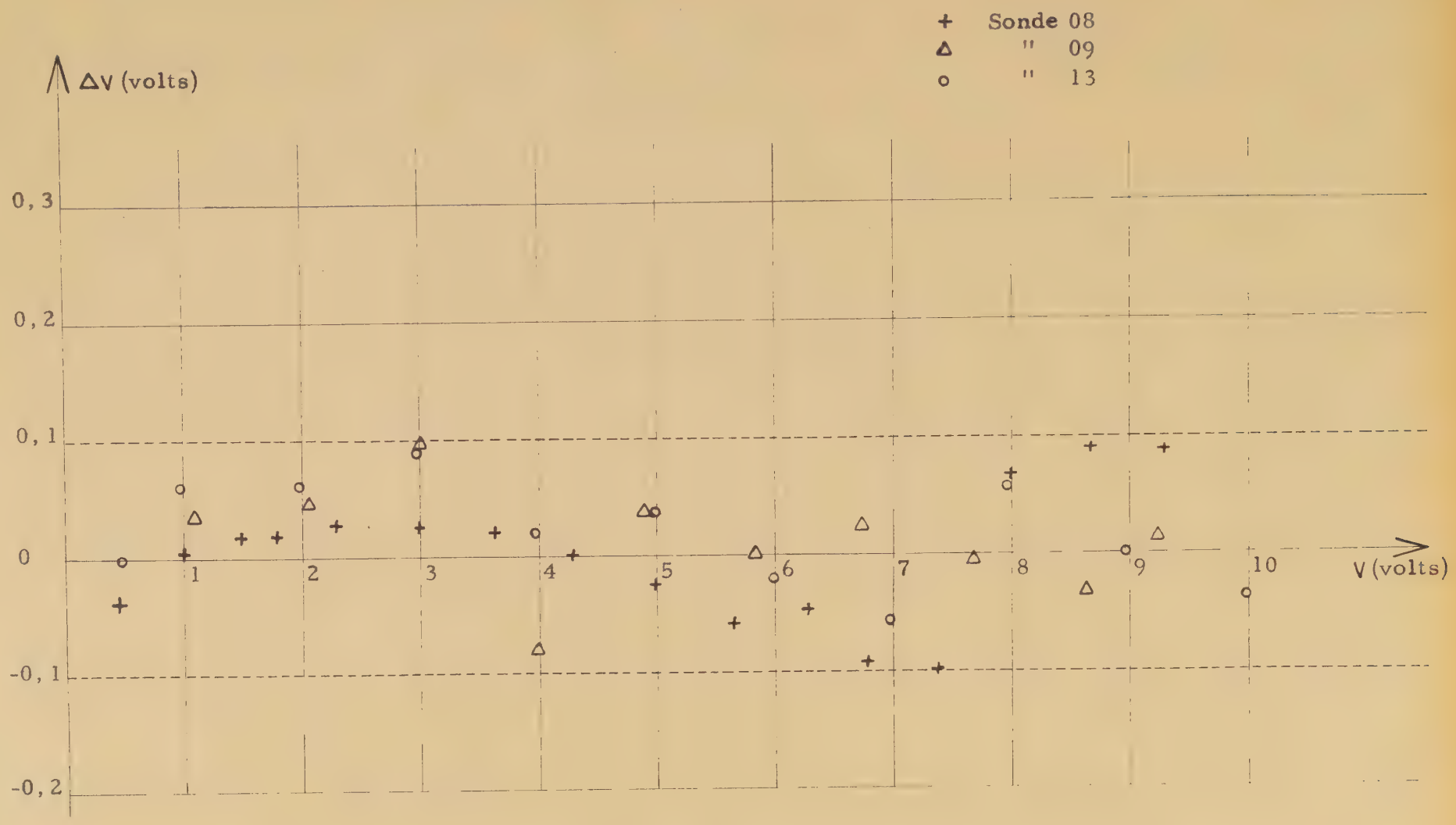


FIGURE_28

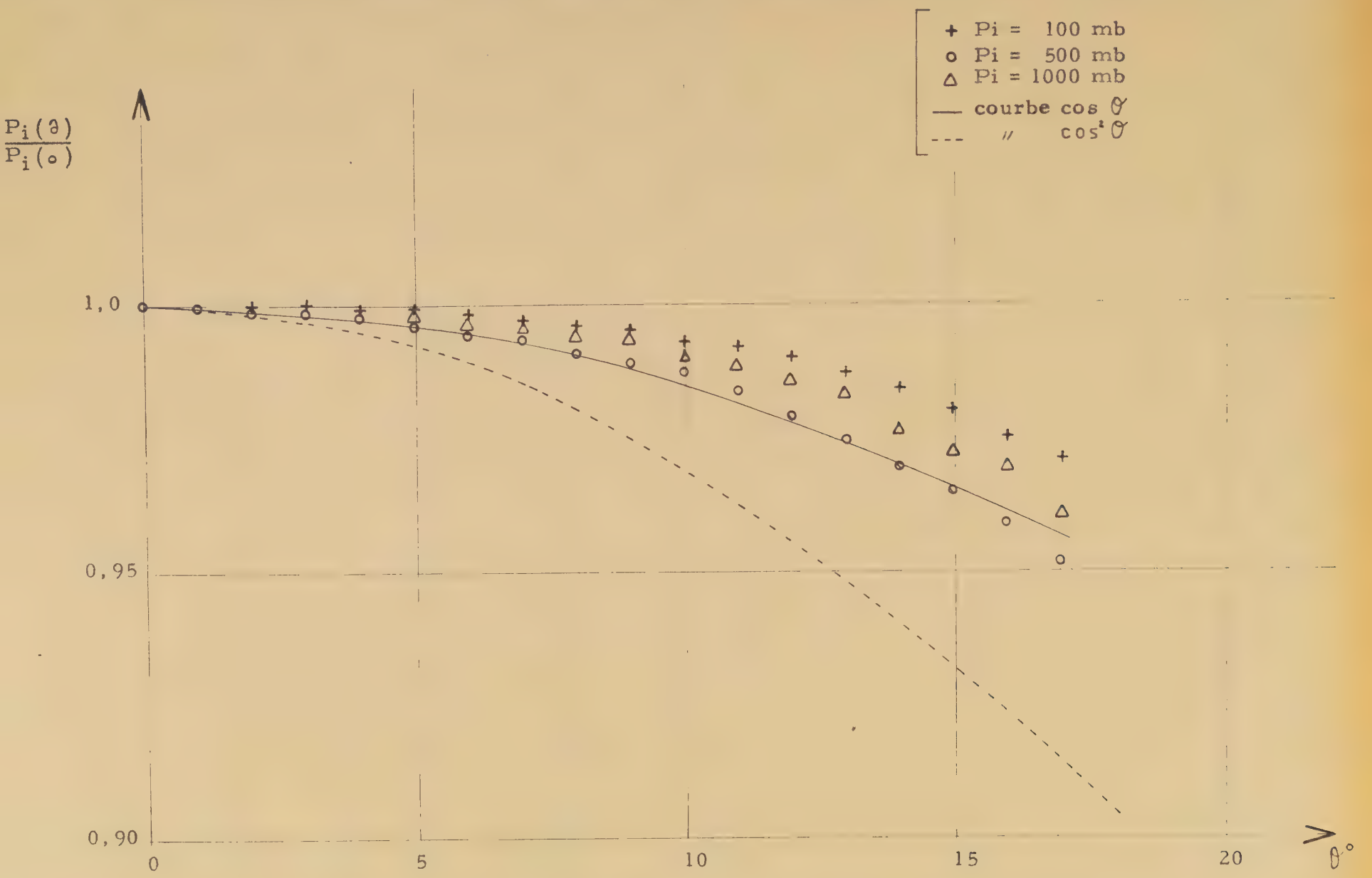

+ Pi = 100 mb
o Pi = 500 mb
Δ Pi = 1000 mb
courbe cos θ
// cos² θ
Pi(θ) / Pi(o)
1,0
0,95
0,90
0
5
10
15
20
θ°

FIGURE _ 29

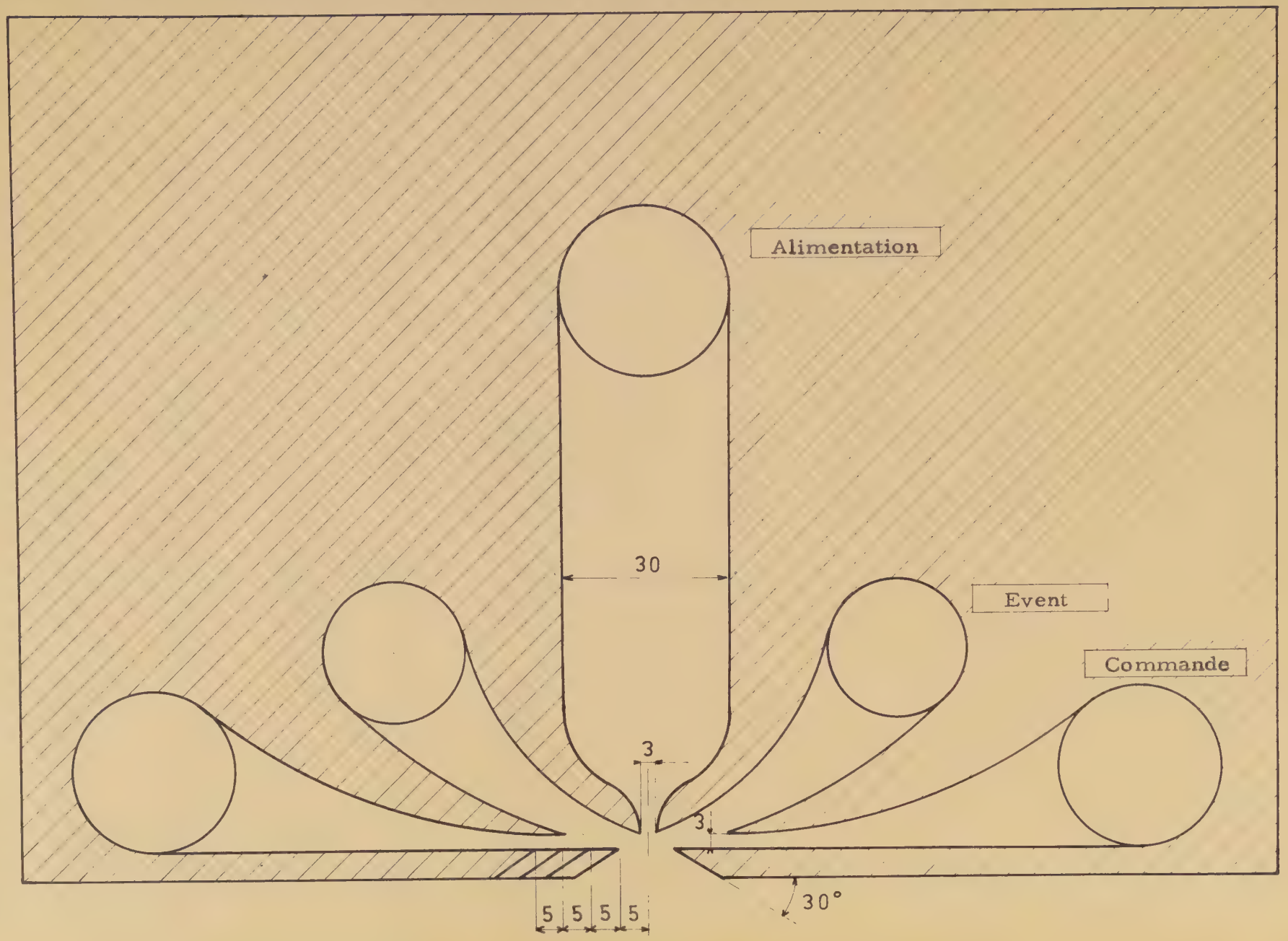


FIGURE_30

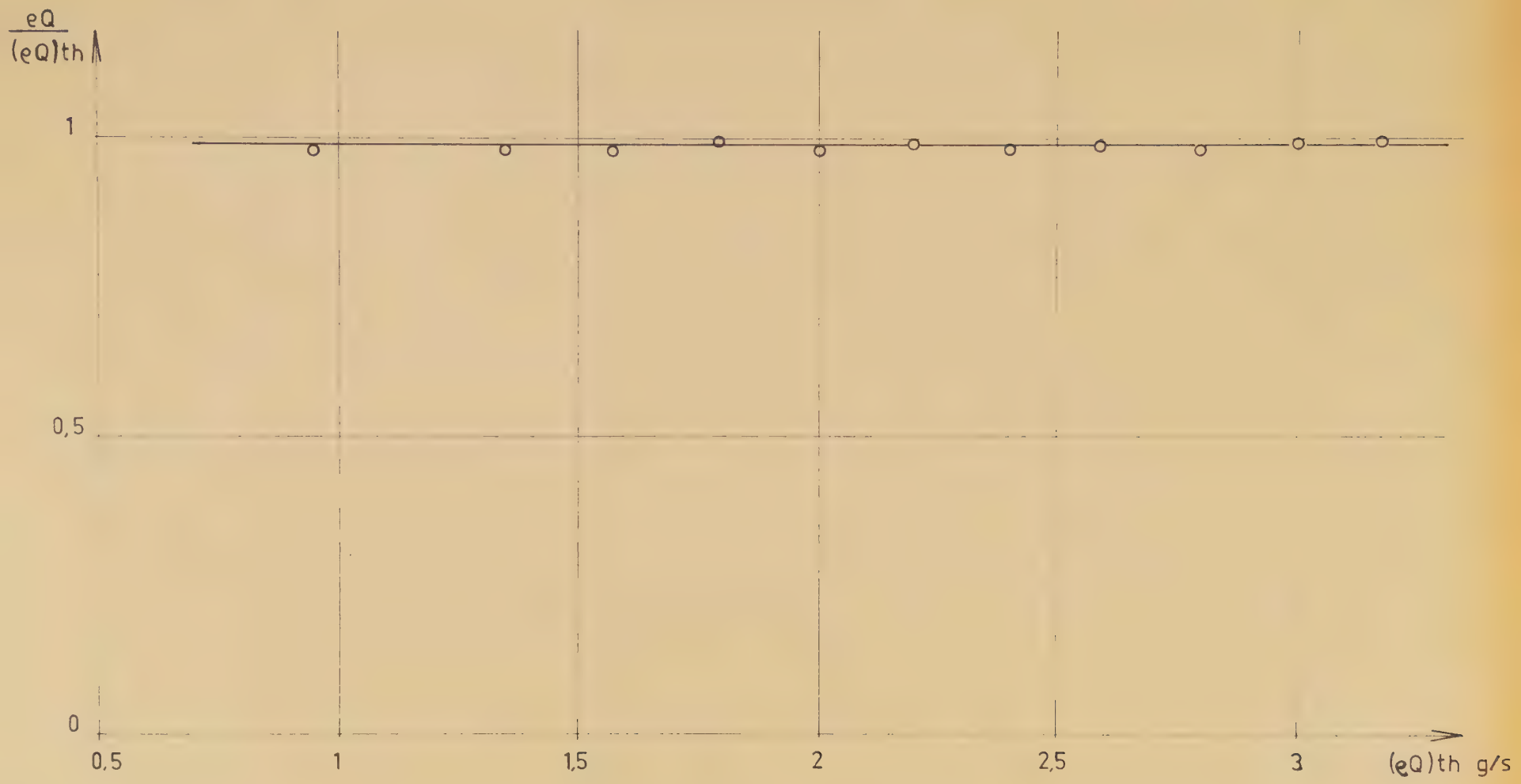


FIGURE_31

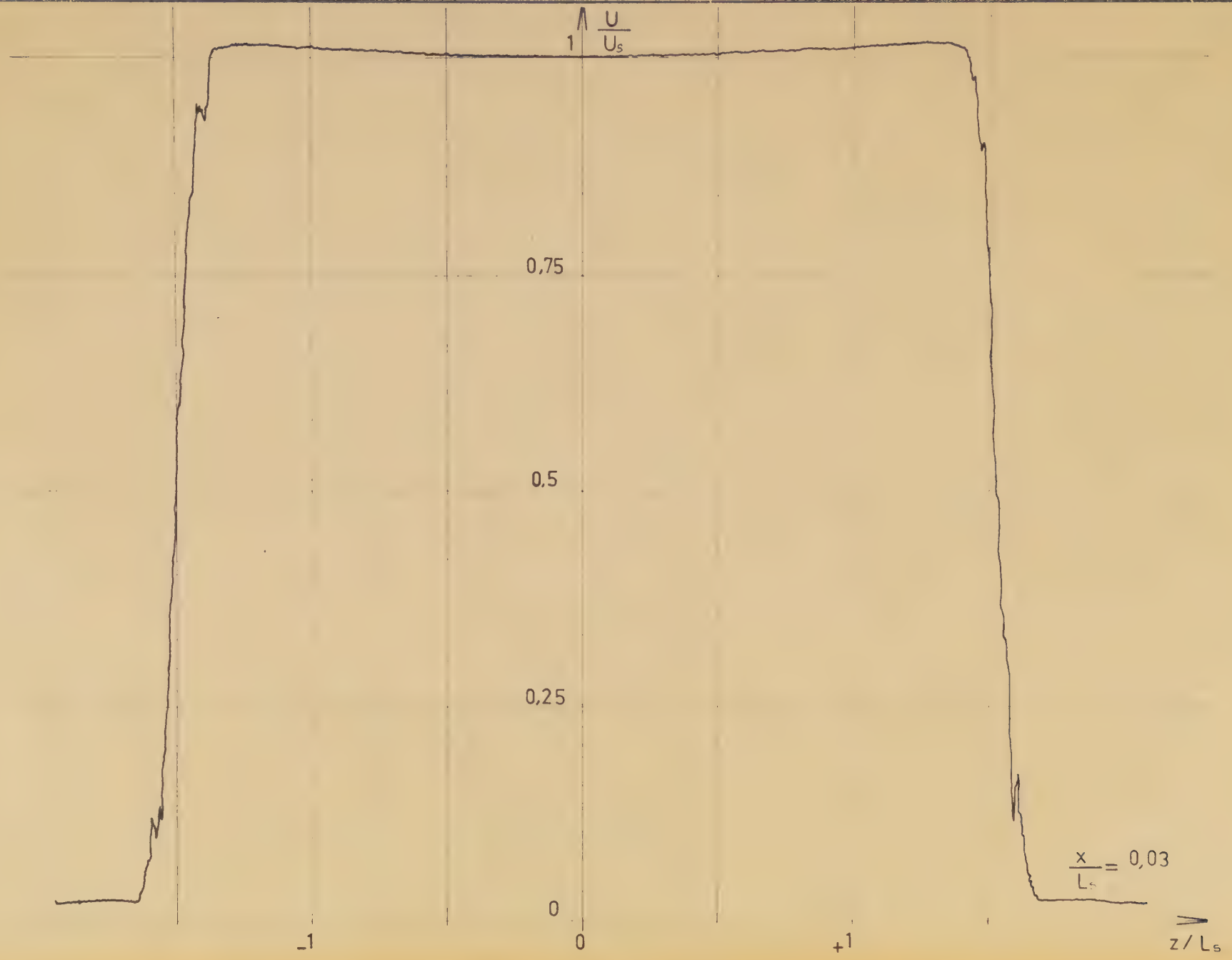


FIGURE 32

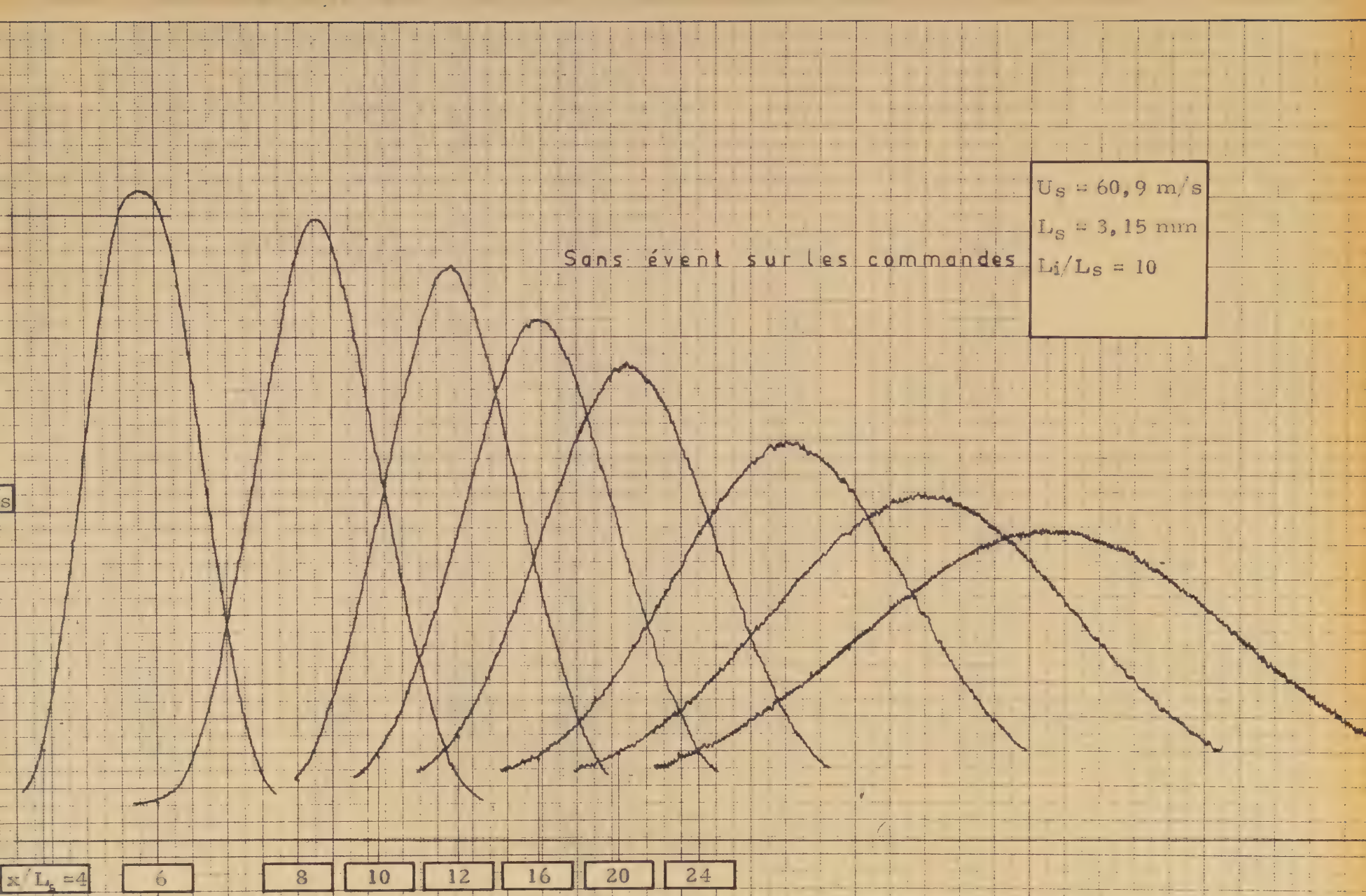

Sans évent sur les commandes
U_s = 60,9 m/s
L_s = 3,15 mm
L_i/L_s = 10
x/L_s =4
6
8
10
12
16
20
24

FIGURE_33

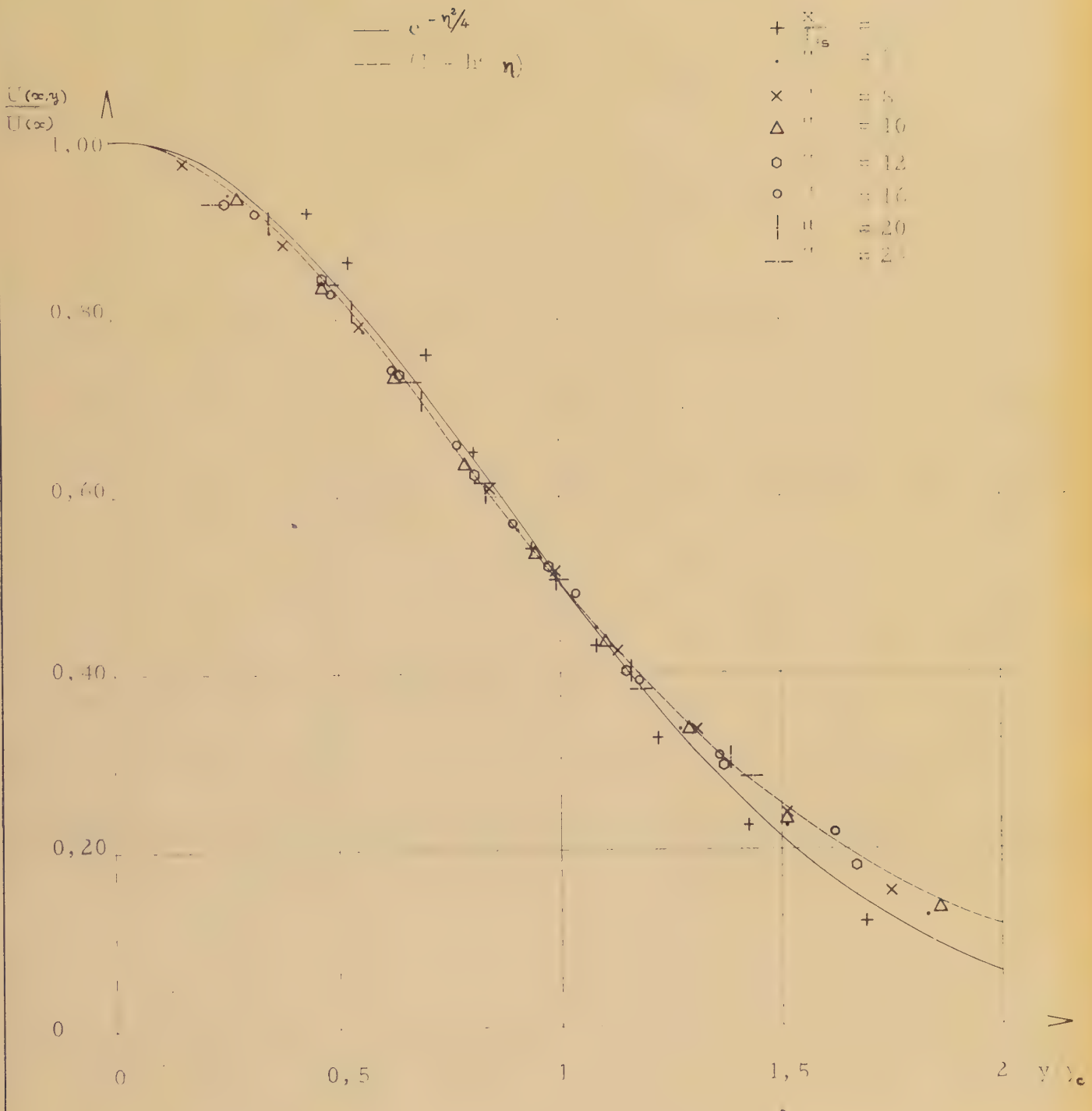

$e^{-\eta^2/4}$
$(1 - b\eta)$
$\frac{U(x,y)}{U(\infty)}$
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0
0
0,5
1
1,5
2
y
y_c

FIGURE_34

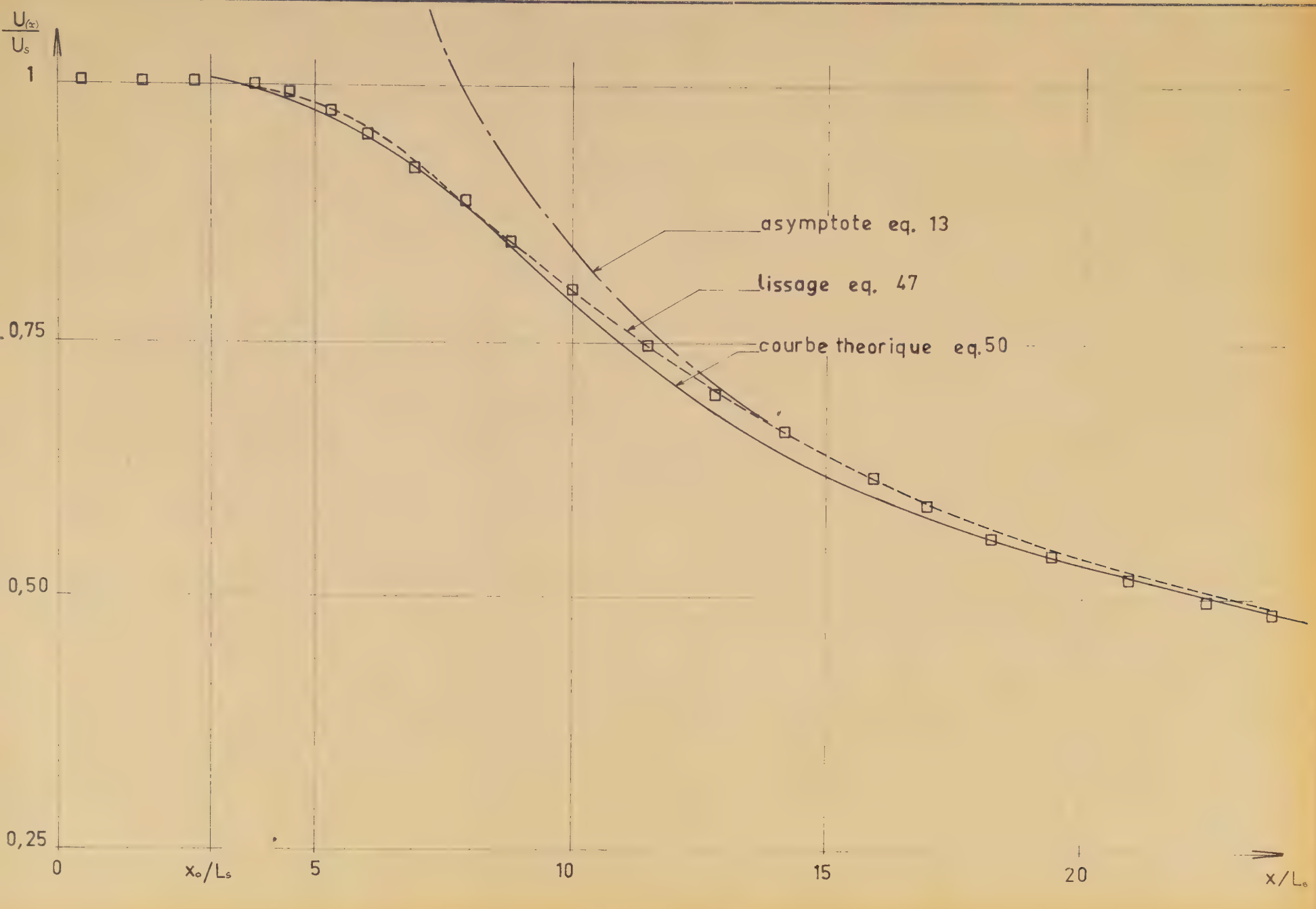

U(x)/Us
1
0,75
0,50
0,25
0
xo/Ls
5
10
15
20
x/Le
asymptote eq. 13
lissage eq. 47
courbe theorique eq.50

FIGURE_35

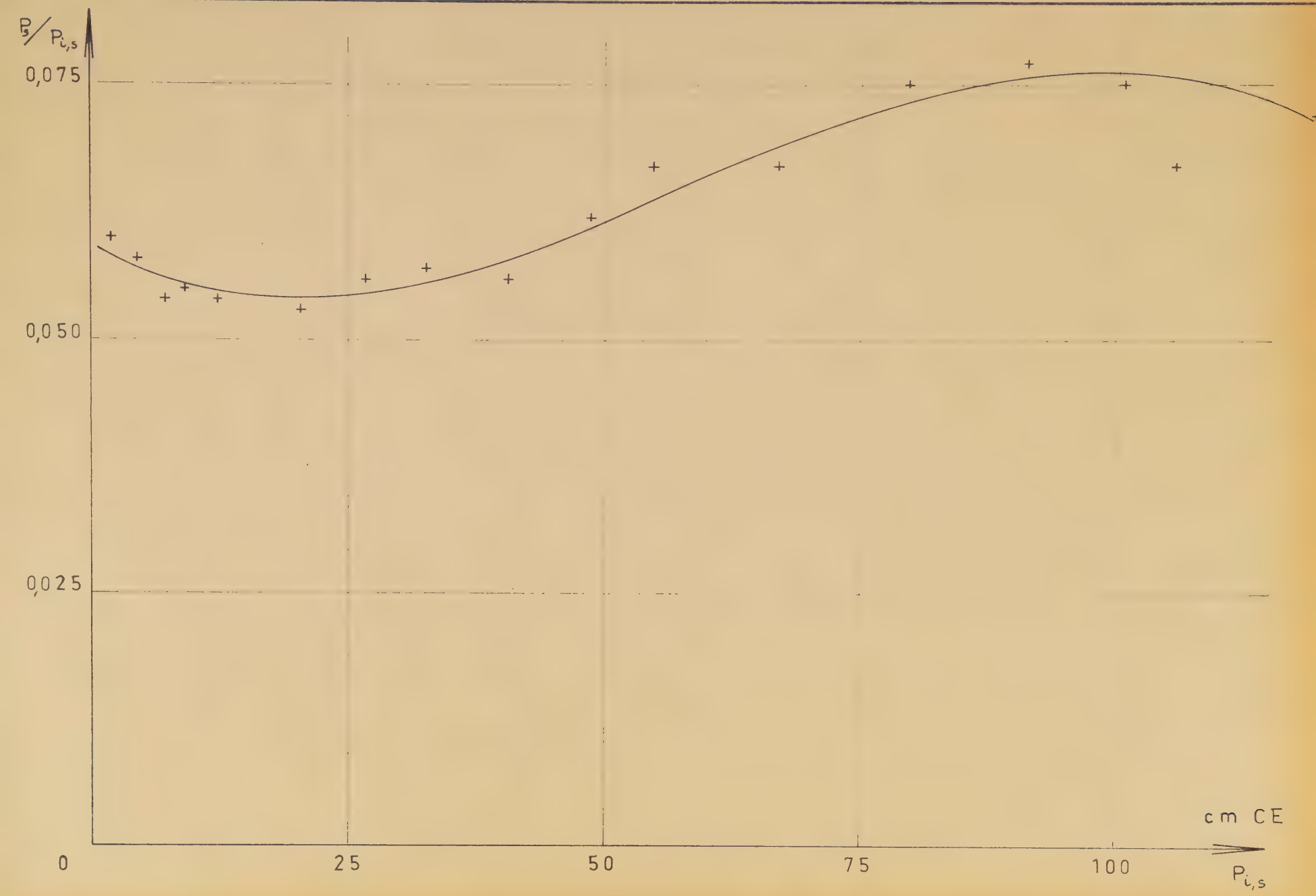


FIGURE_36

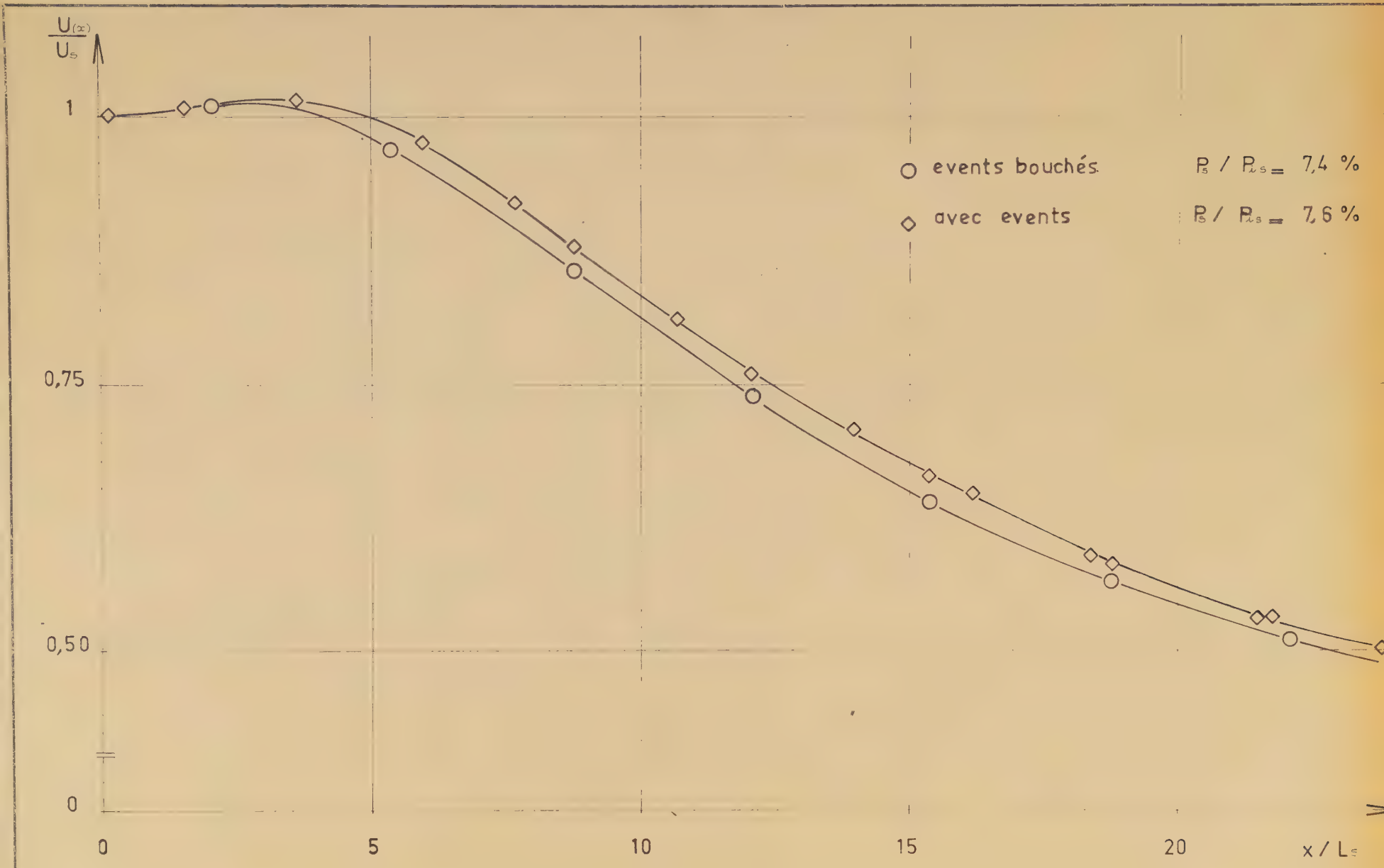

U(x) / Us
1
0,75
0,50
0
0
5
10
15
20
x / Ls
events bouchés
Ps / Pus = 7,4 %
avec events
Ps / Pus = 7,6 %

FIGURE_37

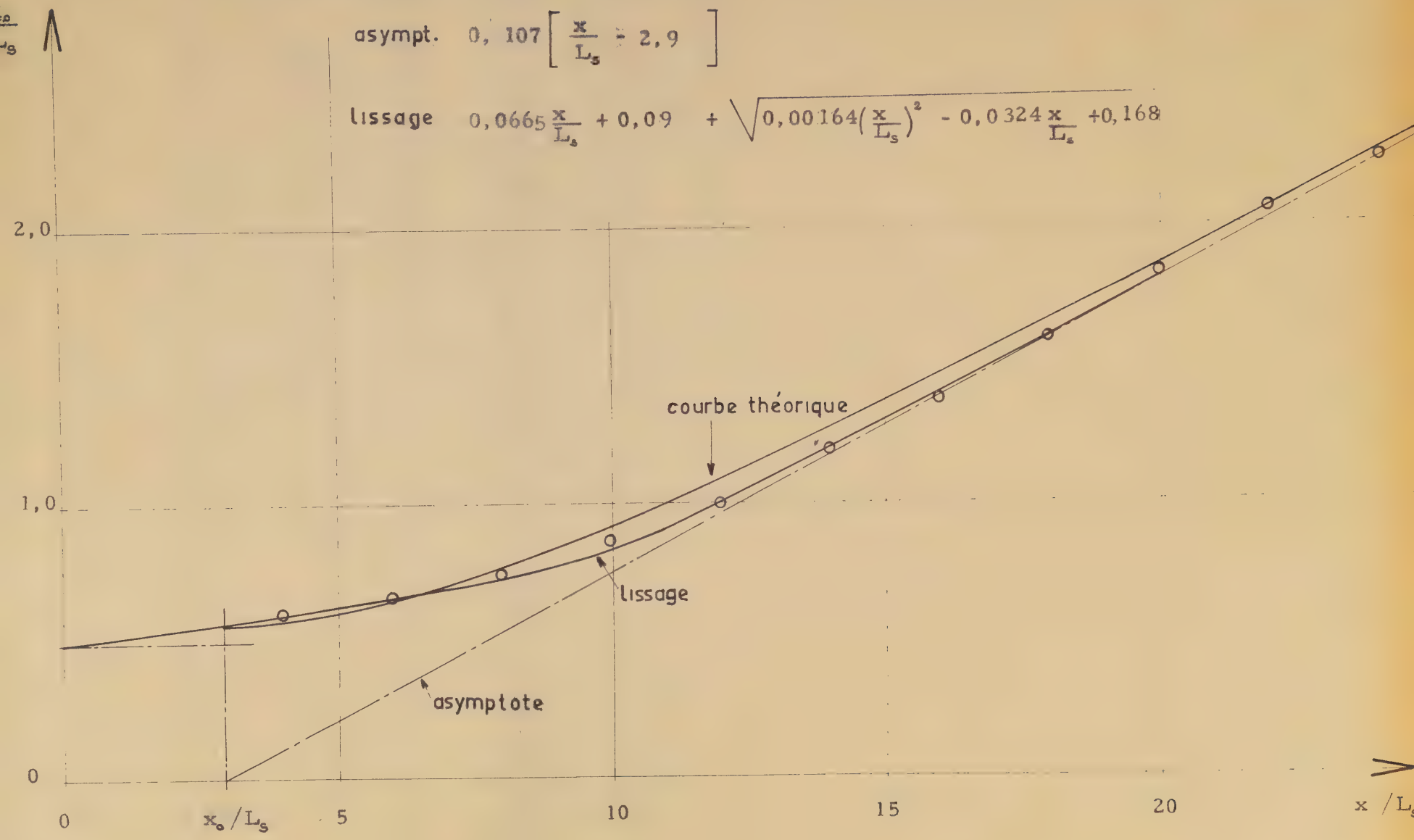

asympt. $0,107\left[\frac{x}{L_s} - 2,9\right]$
lissage $0,0665\frac{x}{L_s} + 0,09 + \sqrt{0,00164\left(\frac{x}{L_s}\right)^2 - 0,0324\frac{x}{L_s} + 0,168}$
2,0
1,0
0
courbe théorique
lissage
asymptote
0
x_o/L_s
5
10
15
20
x/L_s

FIGURE_38

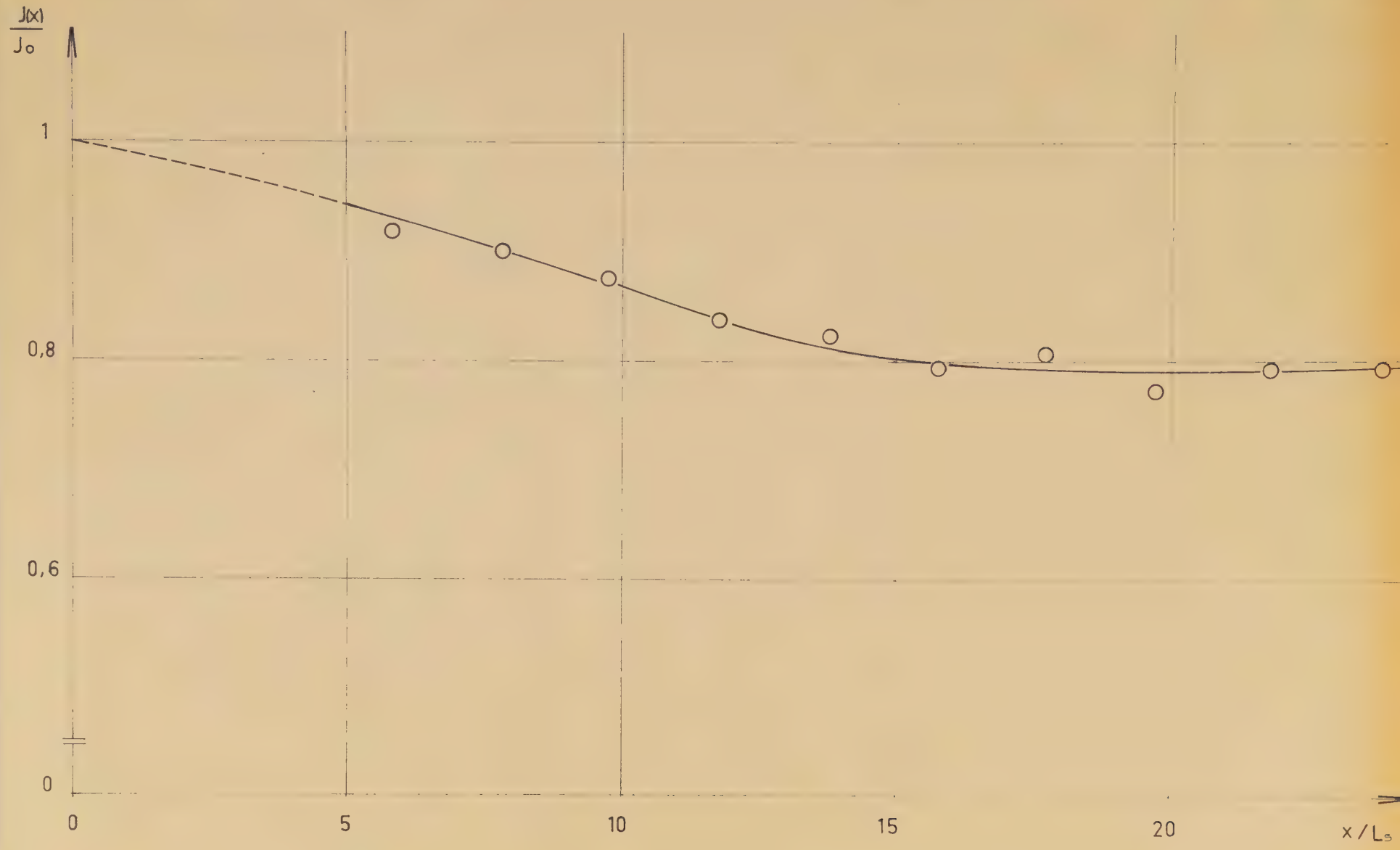


FIGURE_ 39

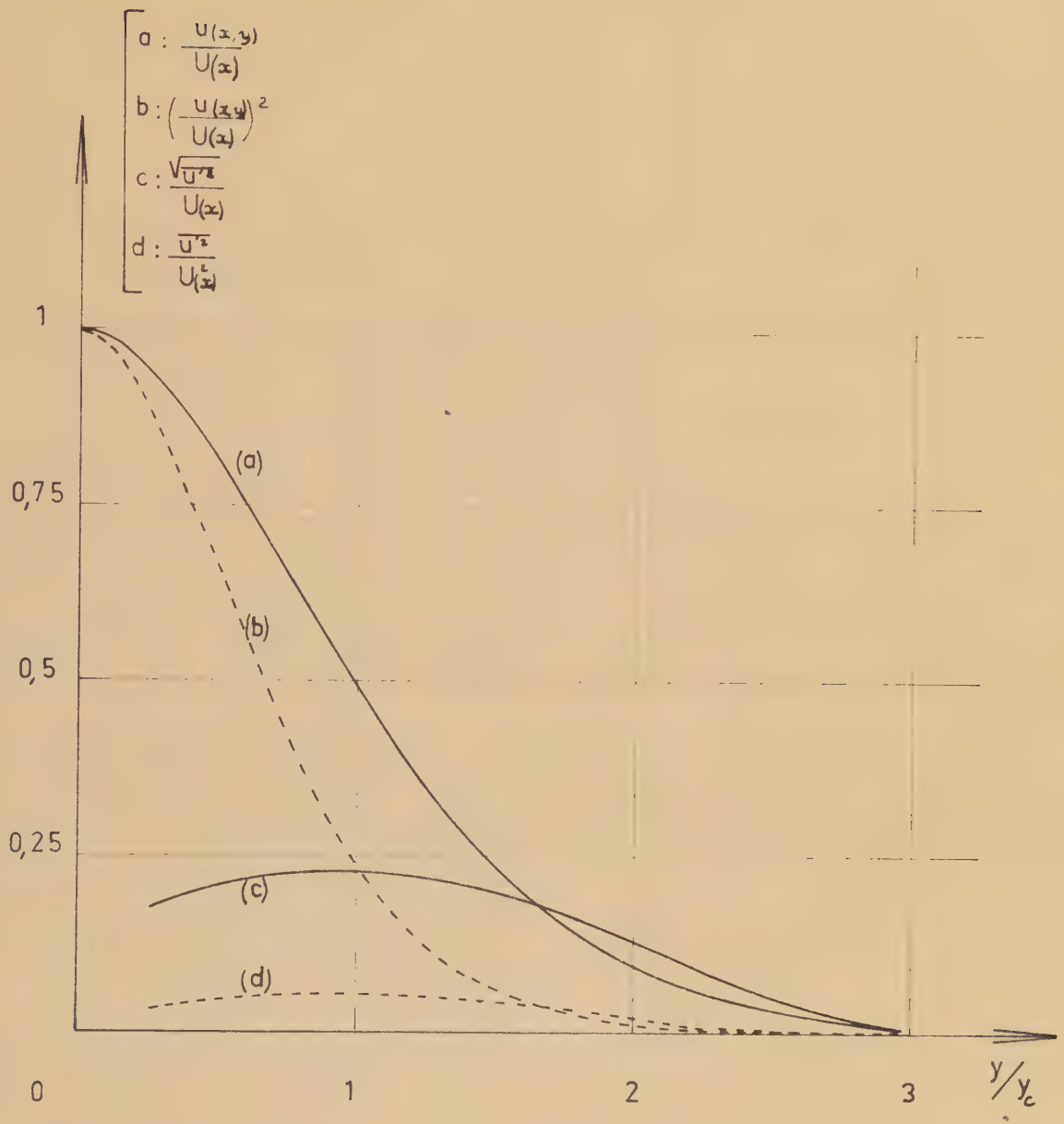


FIGURE_40

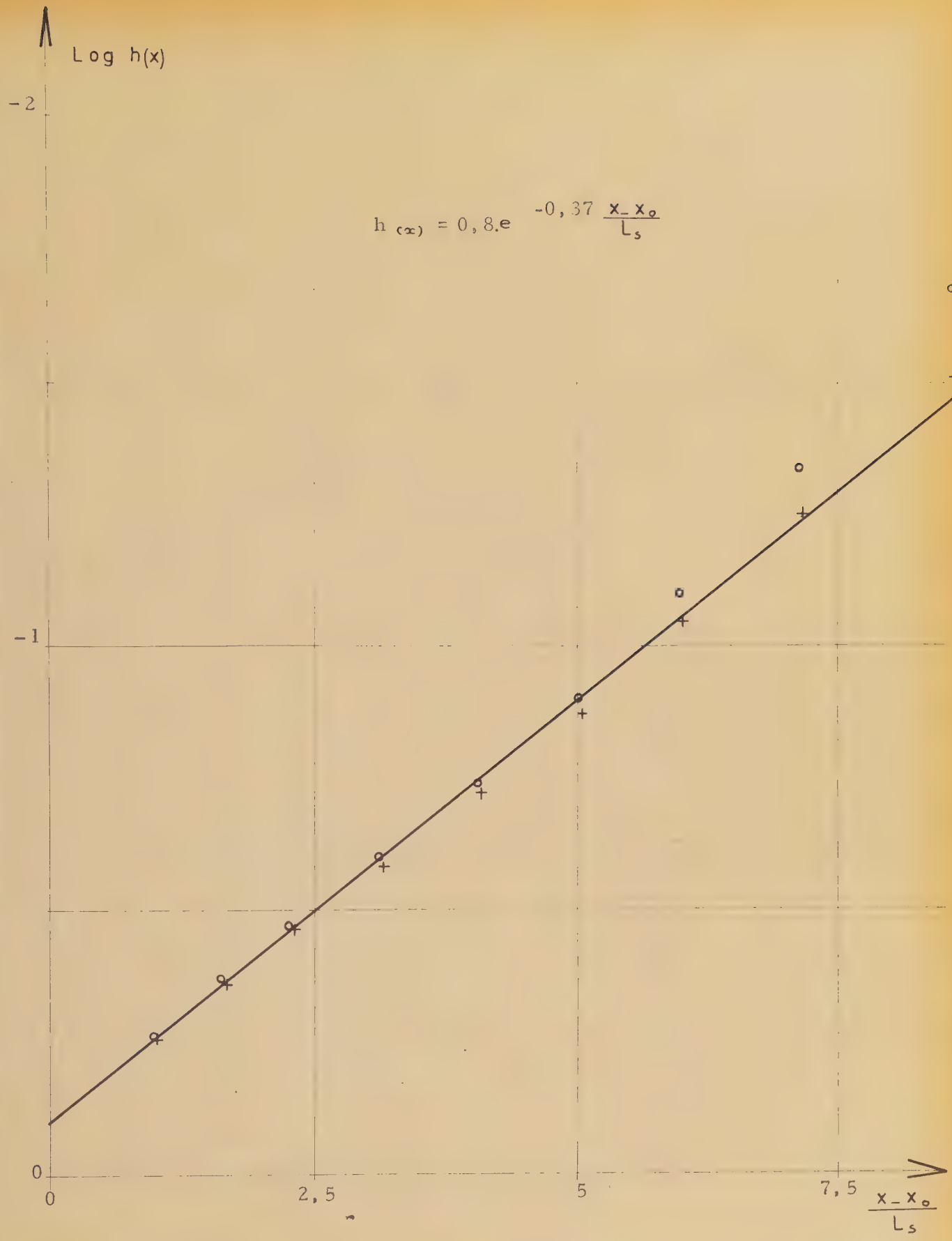


FIGURE_41

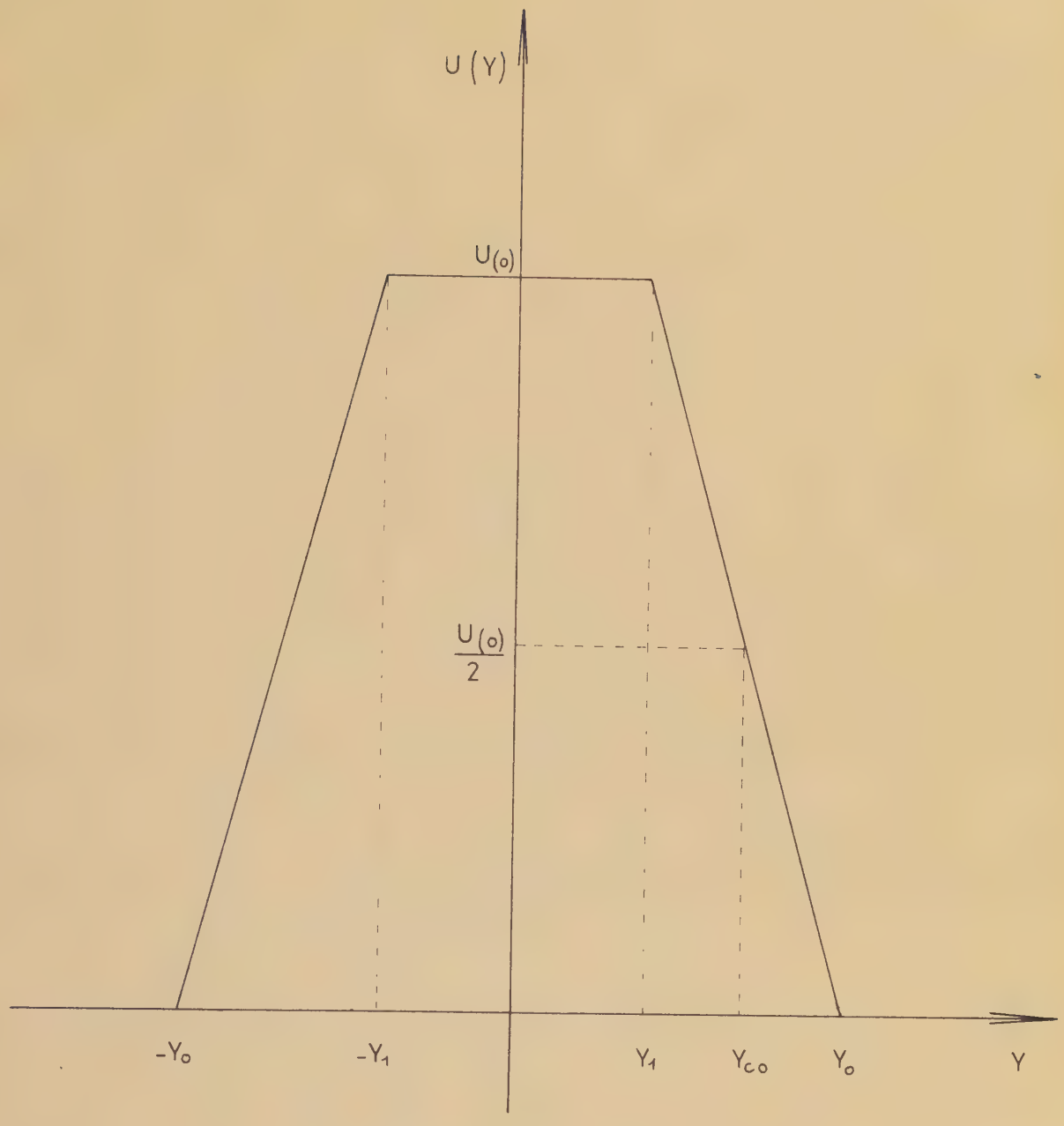


FIGURE_42a

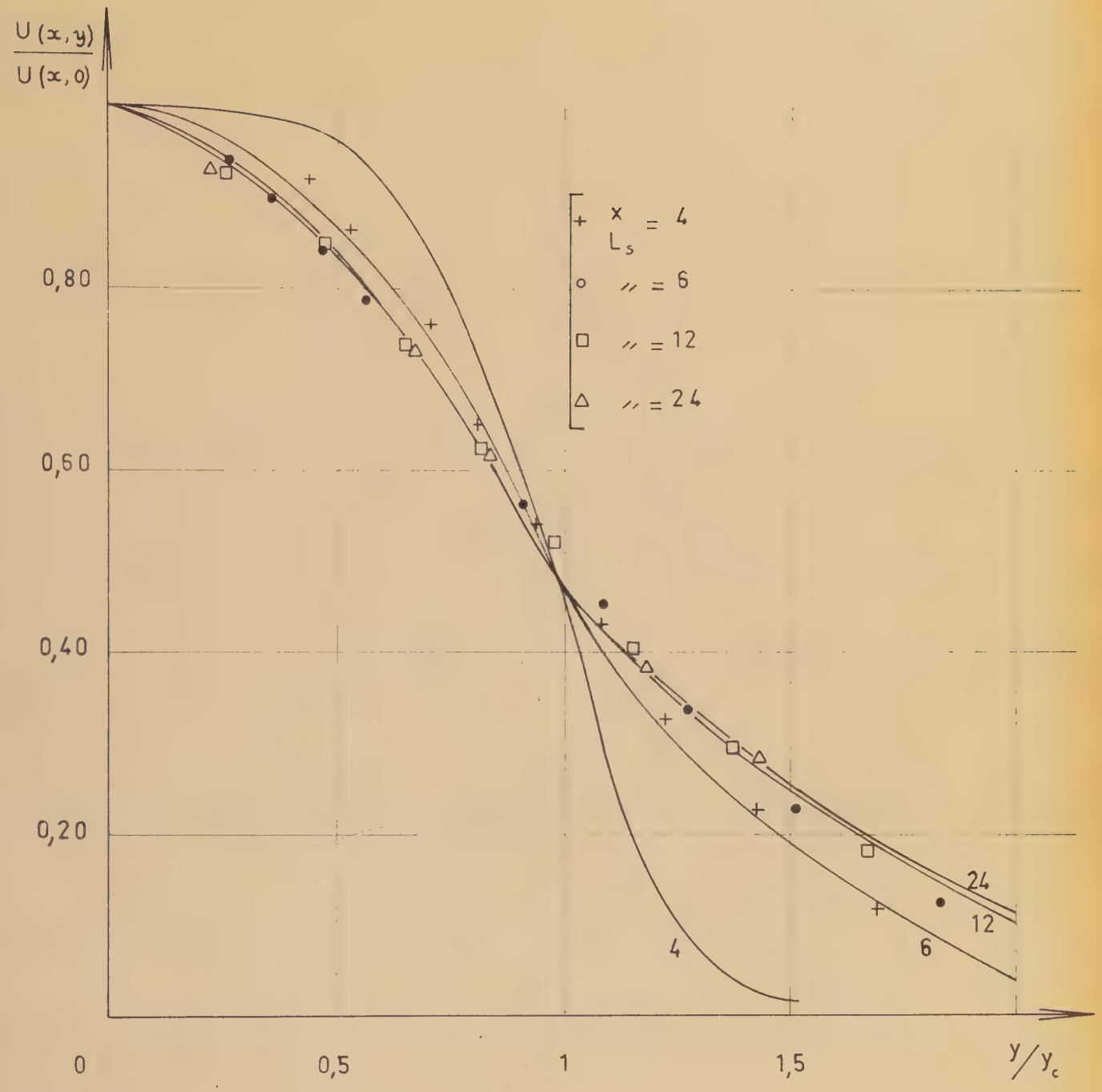


FIGURE_42b

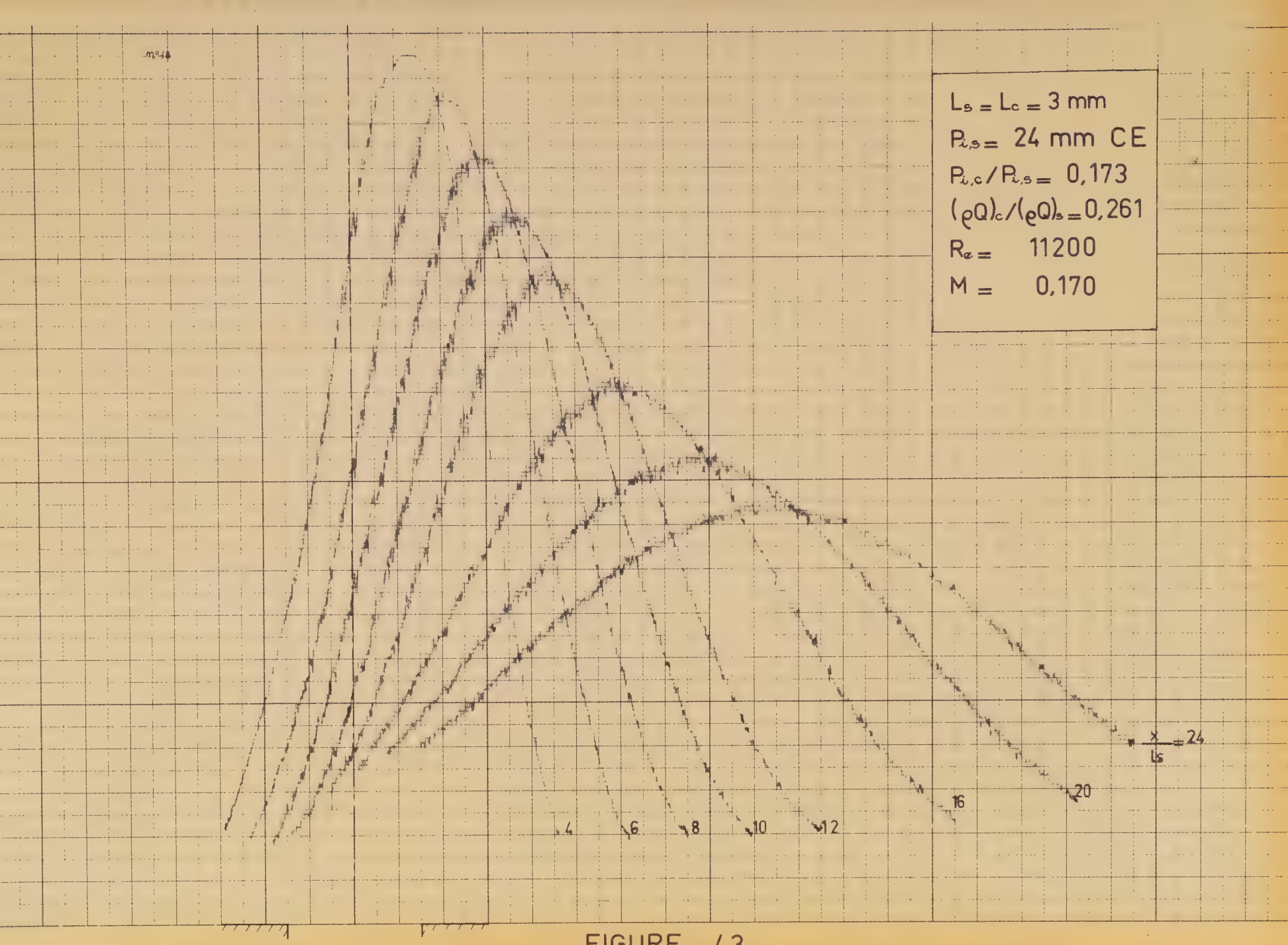

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,173
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,261
$R_e =$ 11200
$M =$ 0,170
$\frac{x}{L_s} = 24$
20
16
12
10
8
6
4

FIGURE _ 43

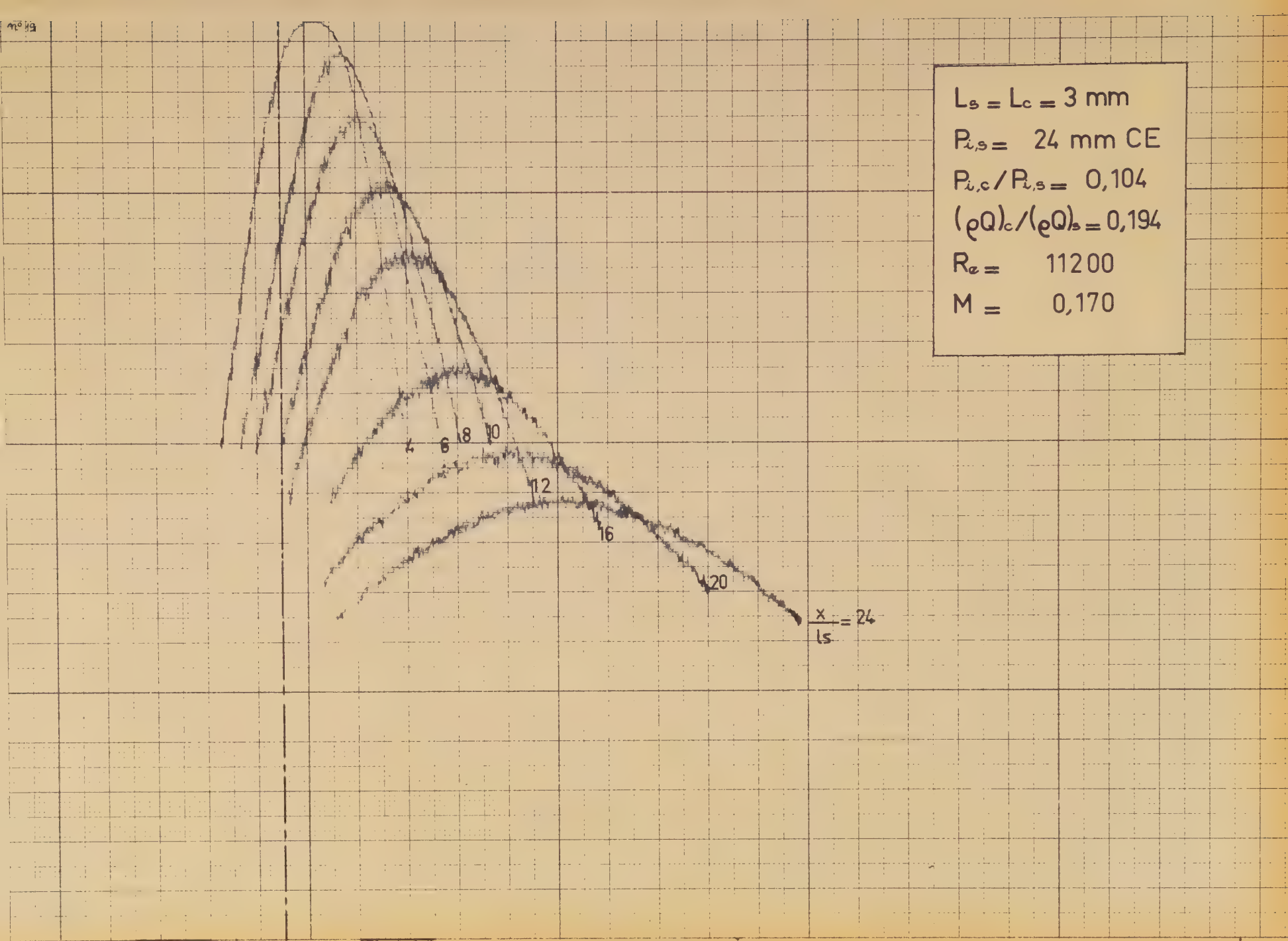

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,104
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,194
$R_e =$ 11200
$M =$ 0,170
4
6
8
10
12
16
20
$\frac{x}{l_s} = 24$

FIGURE _ 44

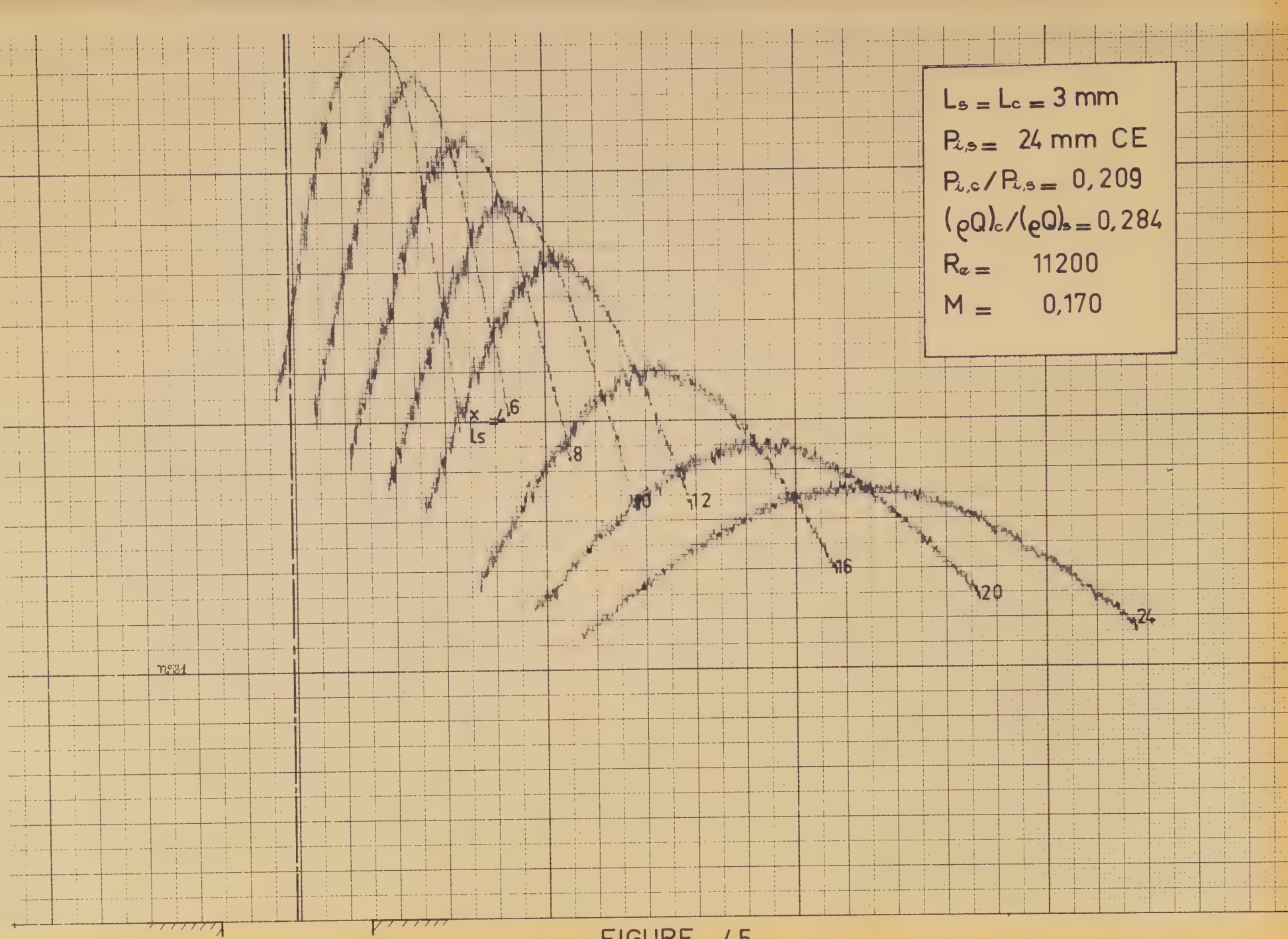

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,209
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,284
$R_e =$ 11200
M = 0,170
x / Ls = 16
8
12
16
20
24
n°81

FIGURE_45

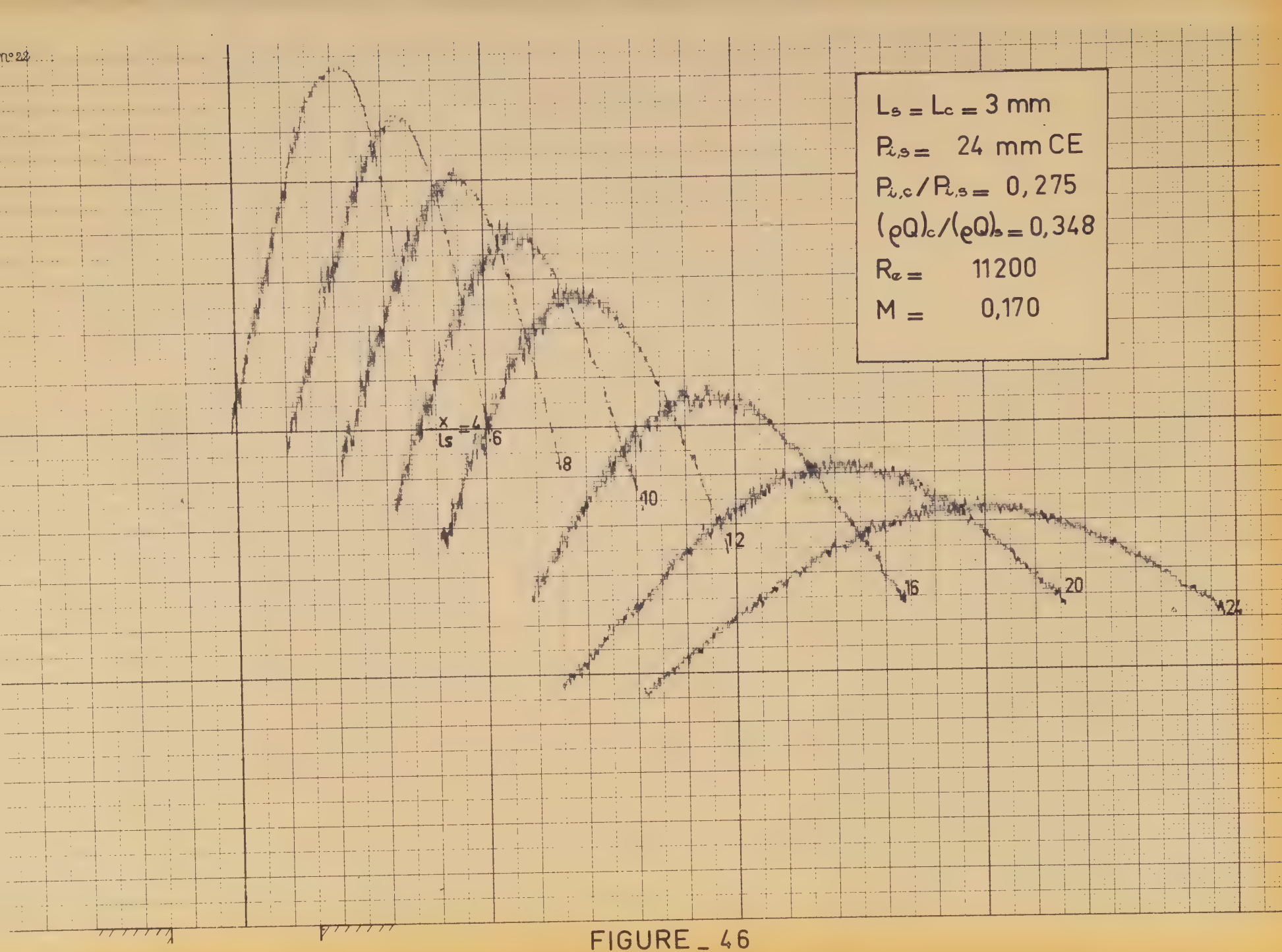

n°22
$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c}/P_{i,s} =$ 0,275
$(\rho Q)_c/(\rho Q)_s =$ 0,348
$R_e =$ 11200
M = 0,170
$\frac{x}{l_s} = 4$
6
8
10
12
16
20
24

FIGURE _ 46

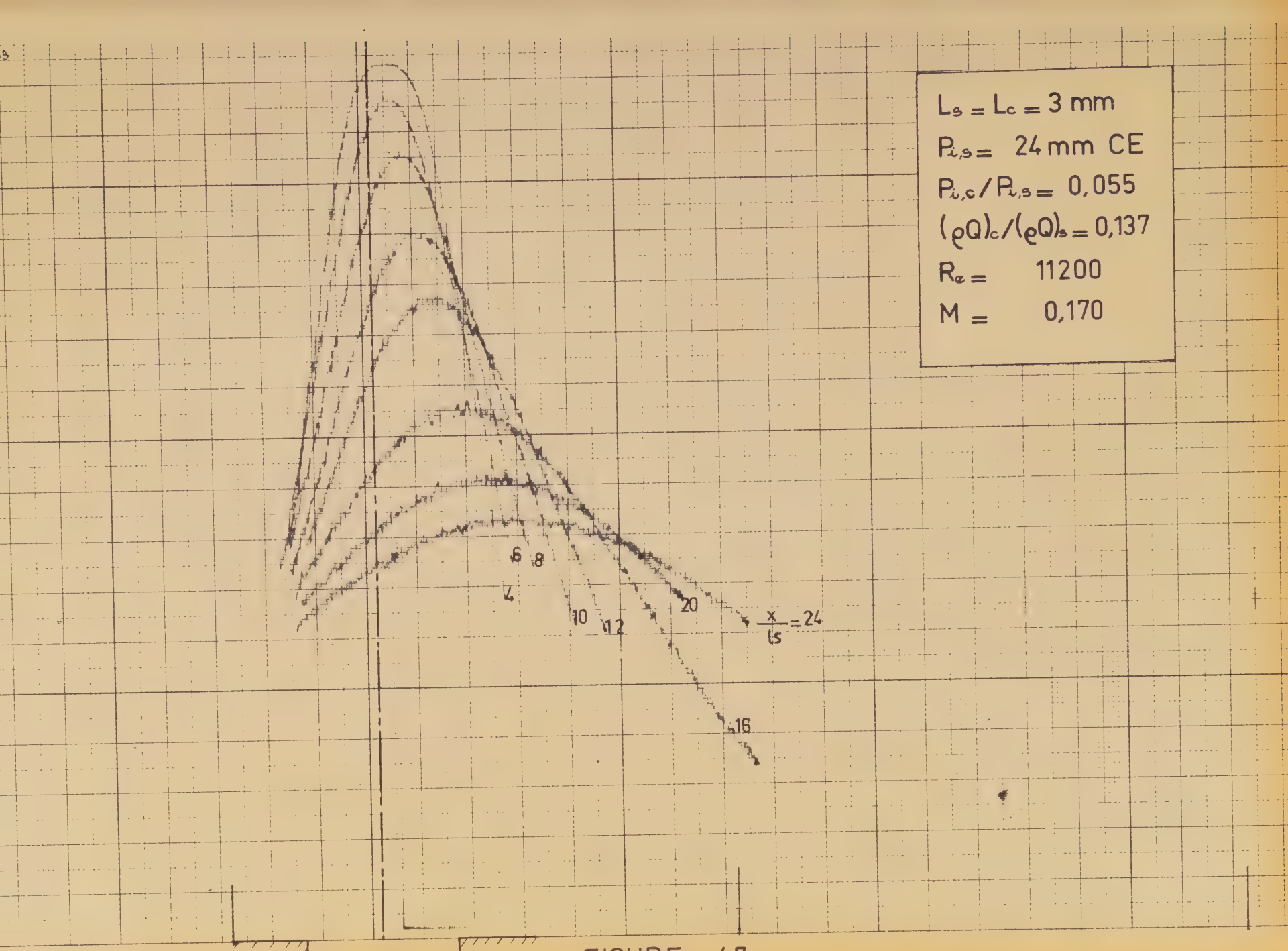

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,055
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,137
$R_e =$ 11200
$M =$ 0,170
4
6
8
10
12
16
20
$\frac{x}{l_s} = 24$

FIGURE _ 47

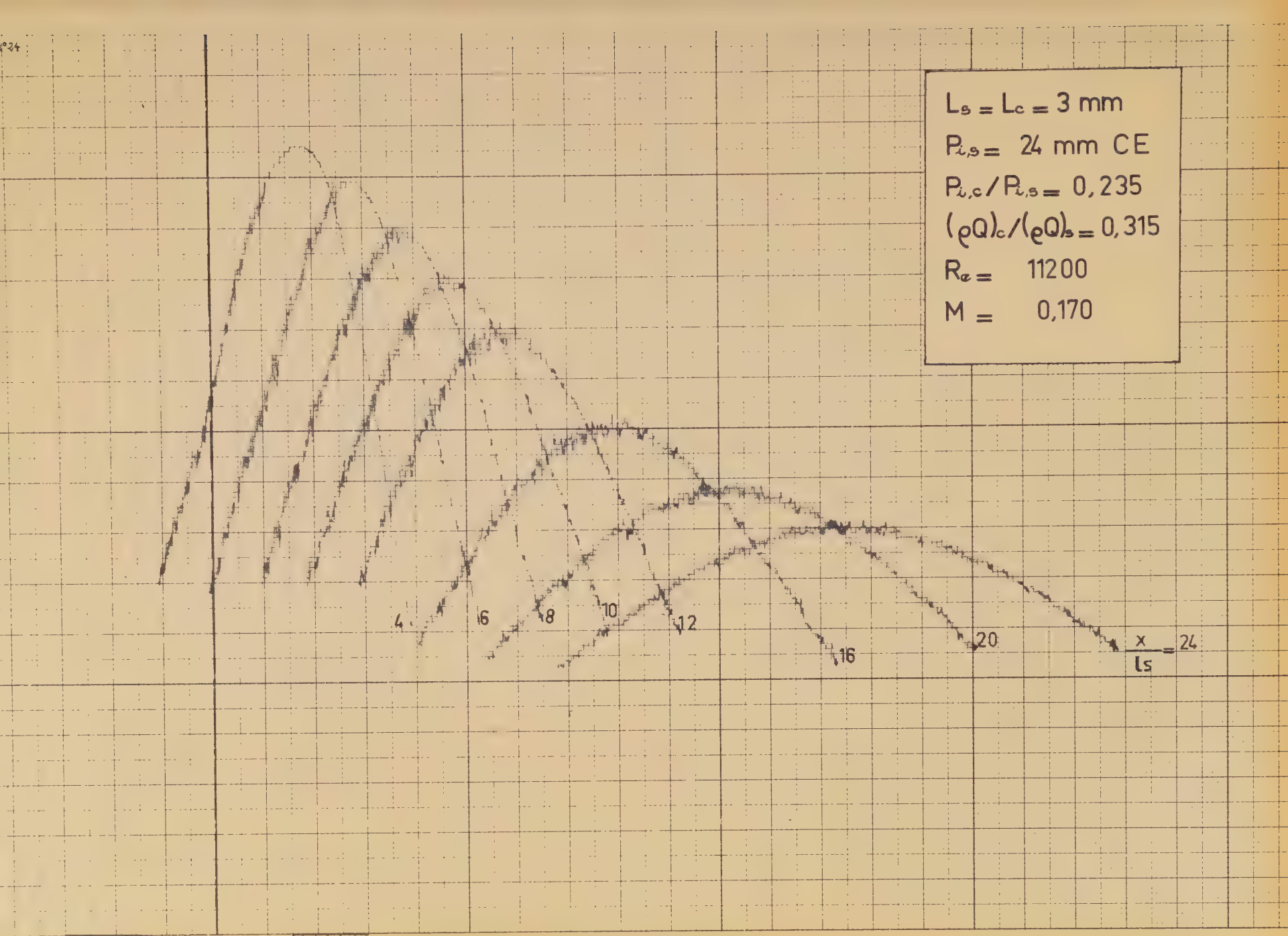

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,235
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,315
$R_e =$ 11200
$M =$ 0,170
4
6
8
10
12
16
20
$\frac{x}{l_s} = 24$

FIGURE _ 48

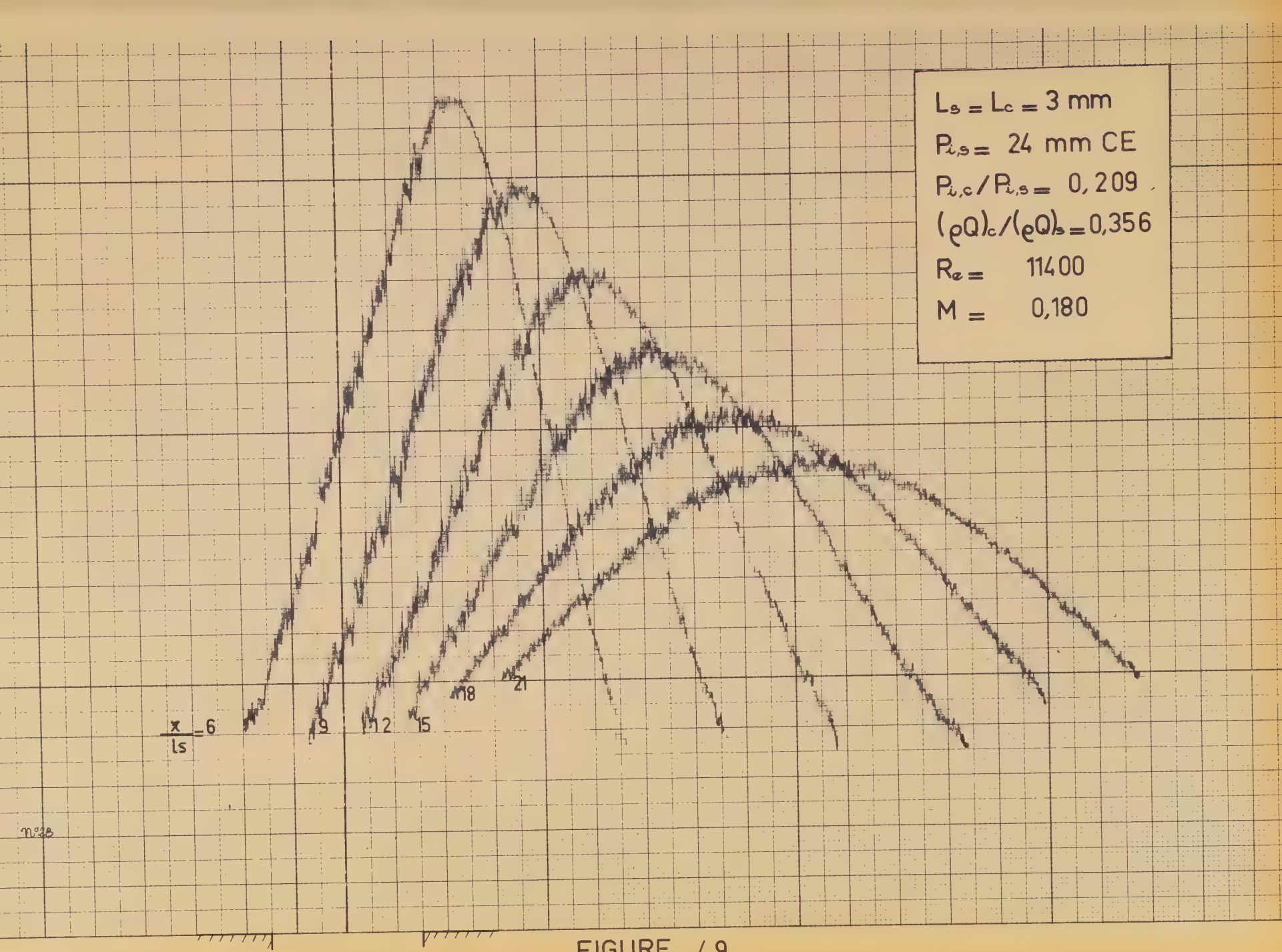

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c}/P_{i,s} =$ 0,209
$(\rho Q)_c/(\rho Q)_s = 0{,}356$
$R_e =$ 11400
$M =$ 0,180
$\frac{x}{l_s} = 6$
9
12
15
18
21
n°38

FIGURE _ 49

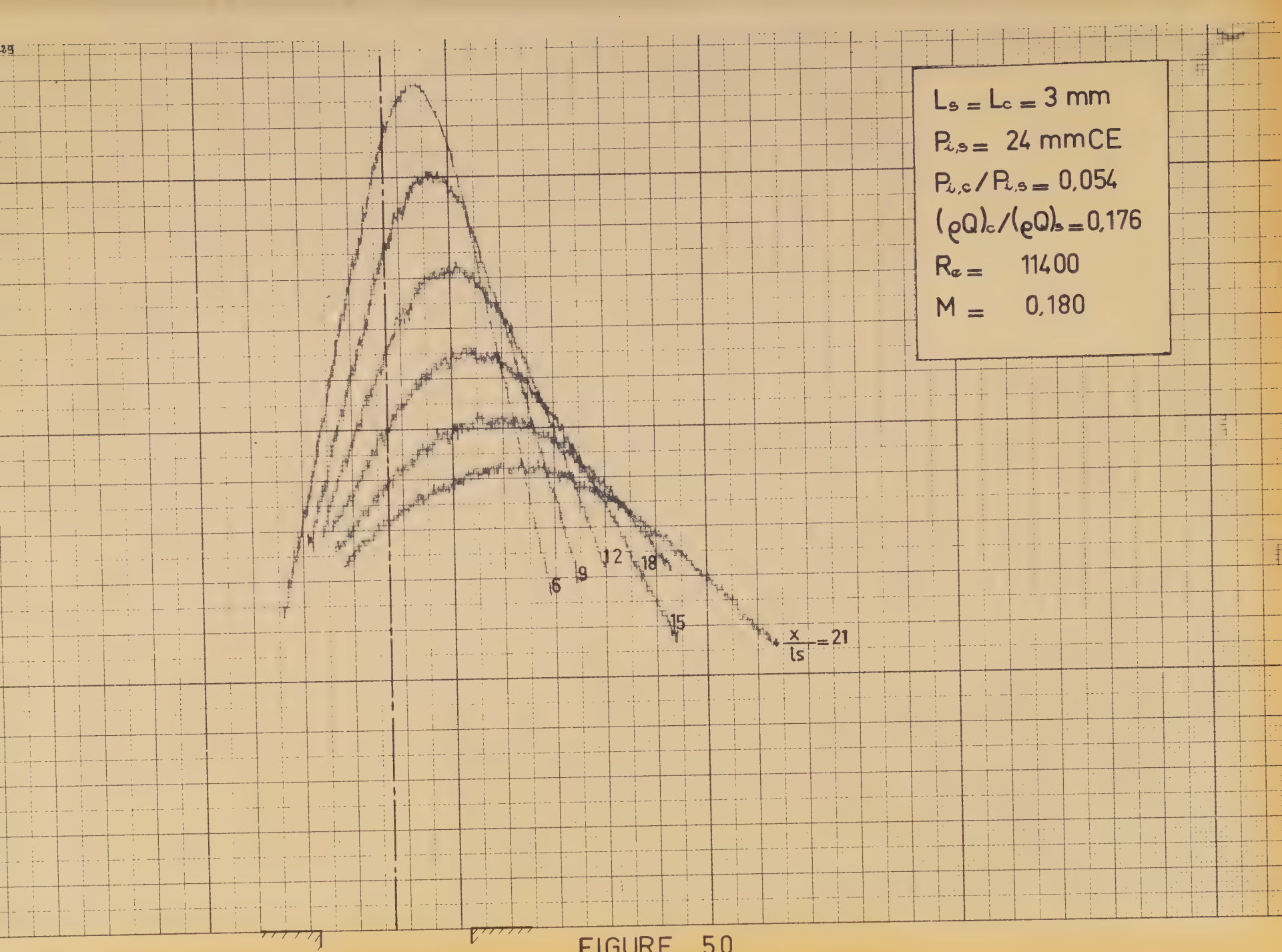

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mmCE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,054
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,176
$R_e =$ 11400
$M =$ 0,180
6
9
12
18
15
$\frac{x}{ls} = 21$

FIGURE_50

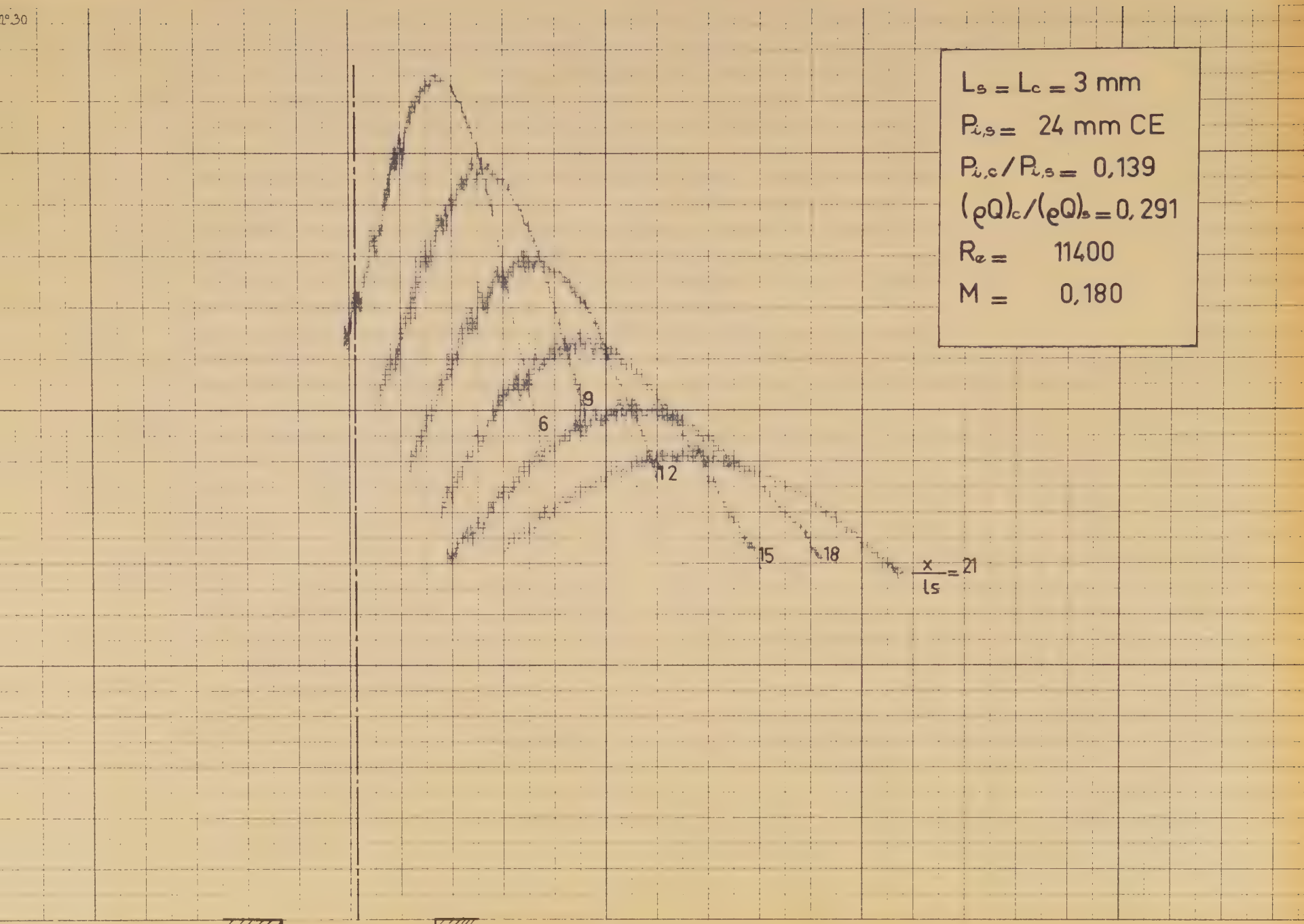

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 24 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,139
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0, 291
$R_e =$ 11400
$M =$ 0,180
6
9
12
15
18
$\frac{x}{ls} = 21$

FIGURE _ 51

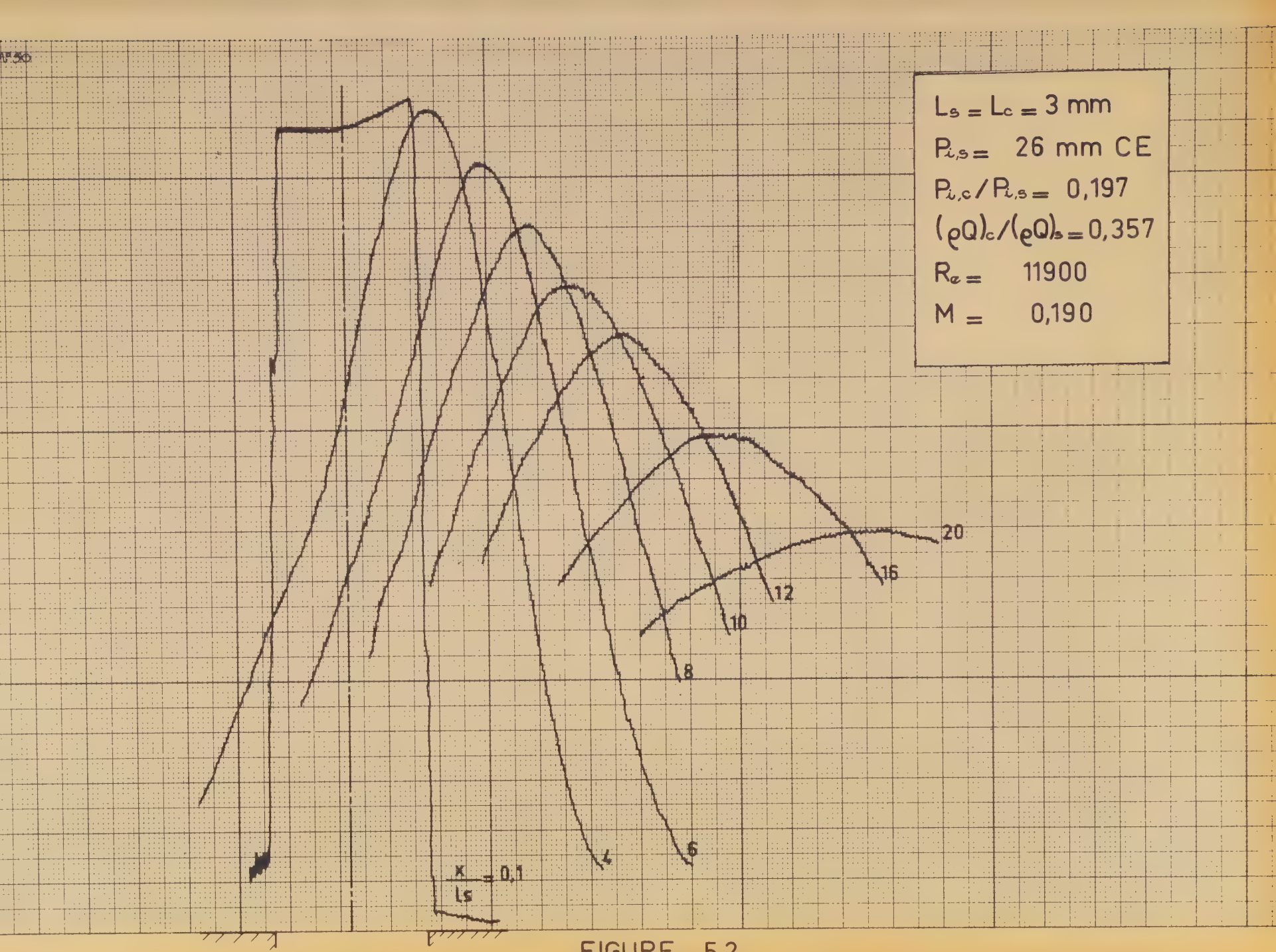

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,197
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,357
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,190
20
16
12
10
8
6
4
$\frac{x}{L_s} = 0,1$

FIGURE_52

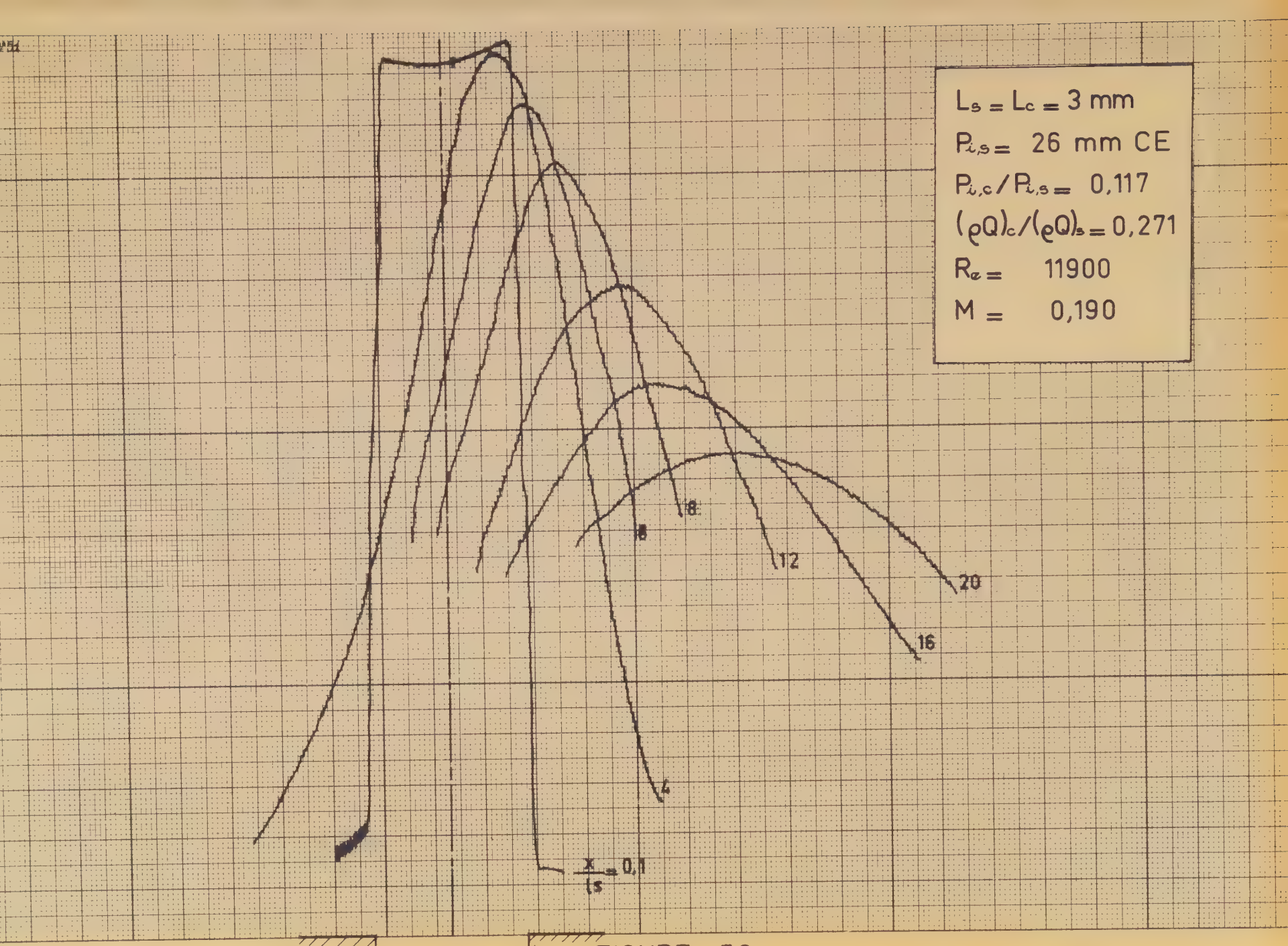

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c}/P_{i,s} =$ 0,117
$(\rho Q)_c/(\rho Q)_s = 0,271$
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,190
4
8
12
16
20
$\frac{x}{l_s} = 0,1$

FIGURE_53

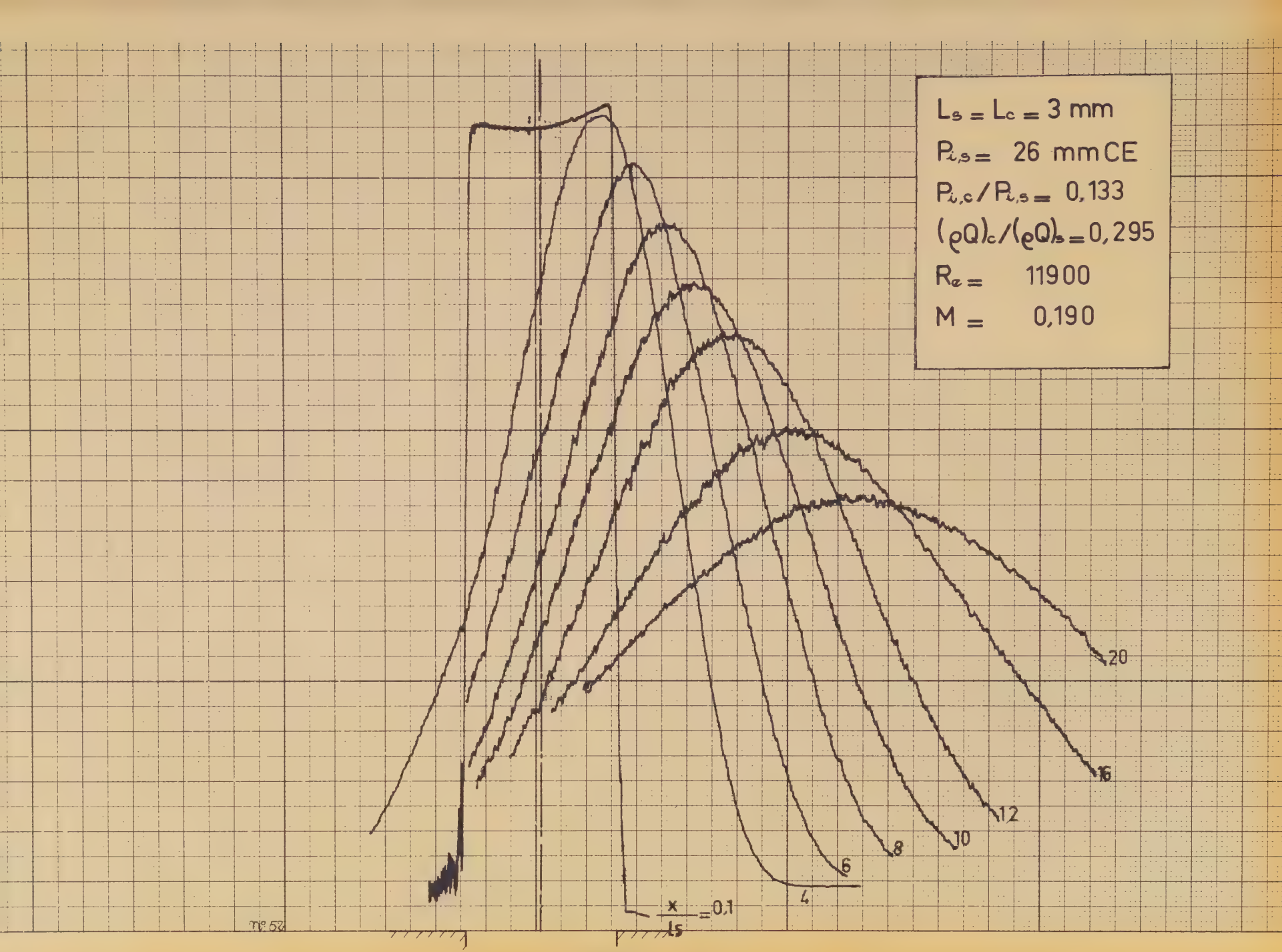

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,133
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,295
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,190
20
16
12
10
8
6
4
$\frac{x}{l_s} = 0,1$

FIGURE _ 54

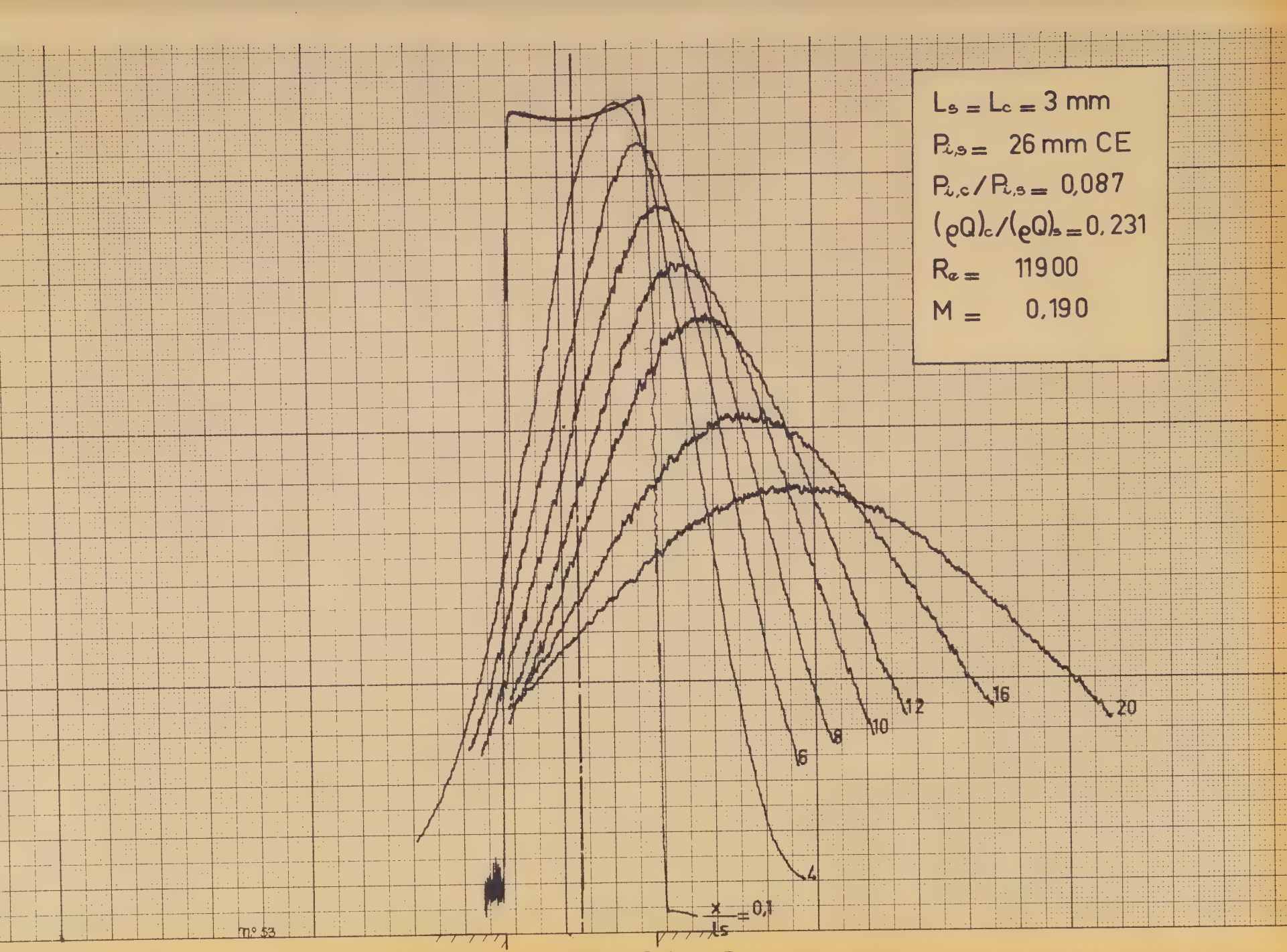

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,087
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,231
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,190
4
6
8
10
12
16
20
$\frac{x}{l_s} = 0,1$
m° 53

FIGURE _ 55

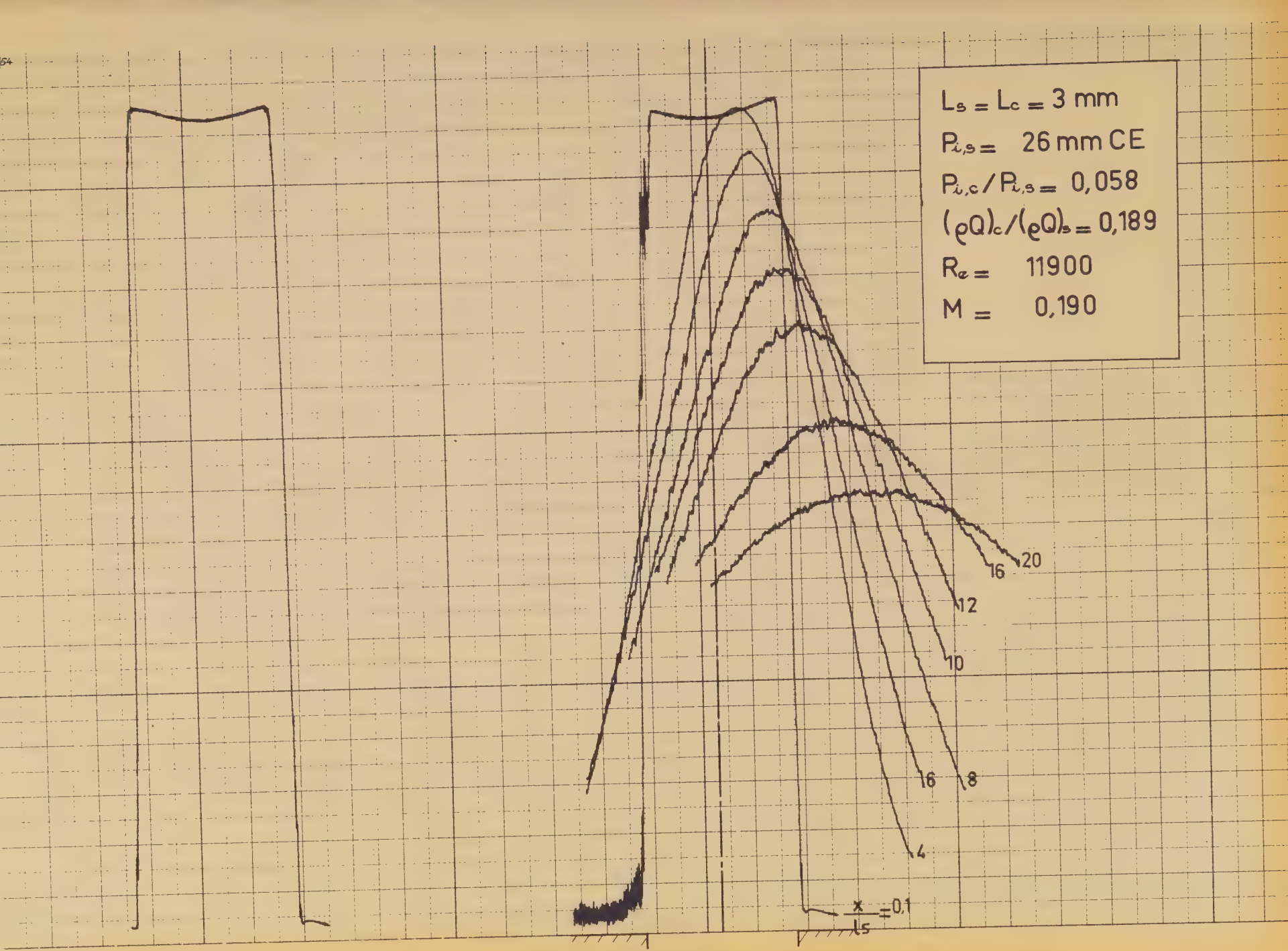

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,058
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,189
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,190
20
16
12
10
8
16
4
$\frac{x}{l_s} = 0,1$

FIGURE _ 56

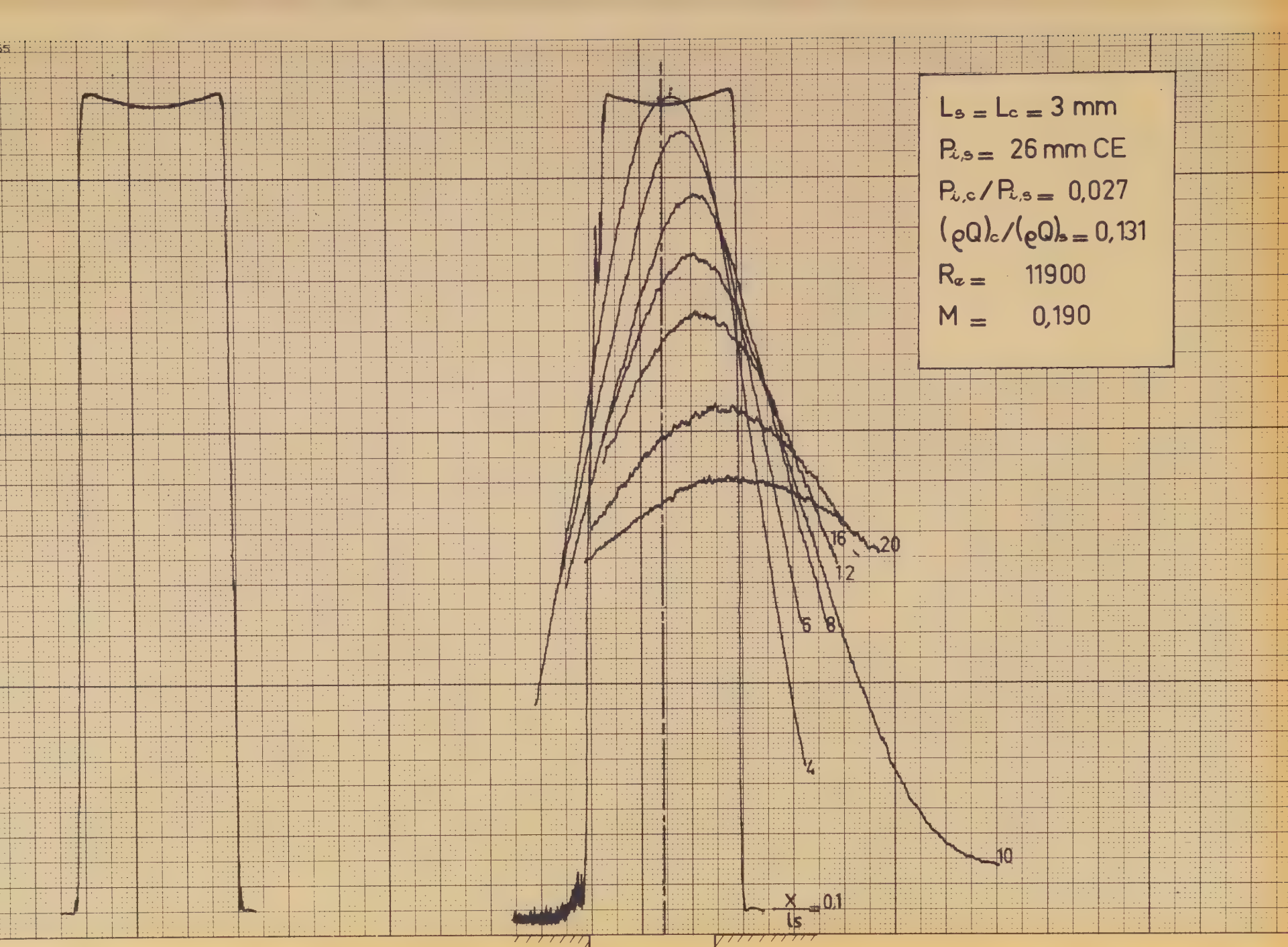

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,027
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,131
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,190
16
20
12
5
8
4
10
$\frac{x}{l_s} = 0.1$

FIGURE _ 57

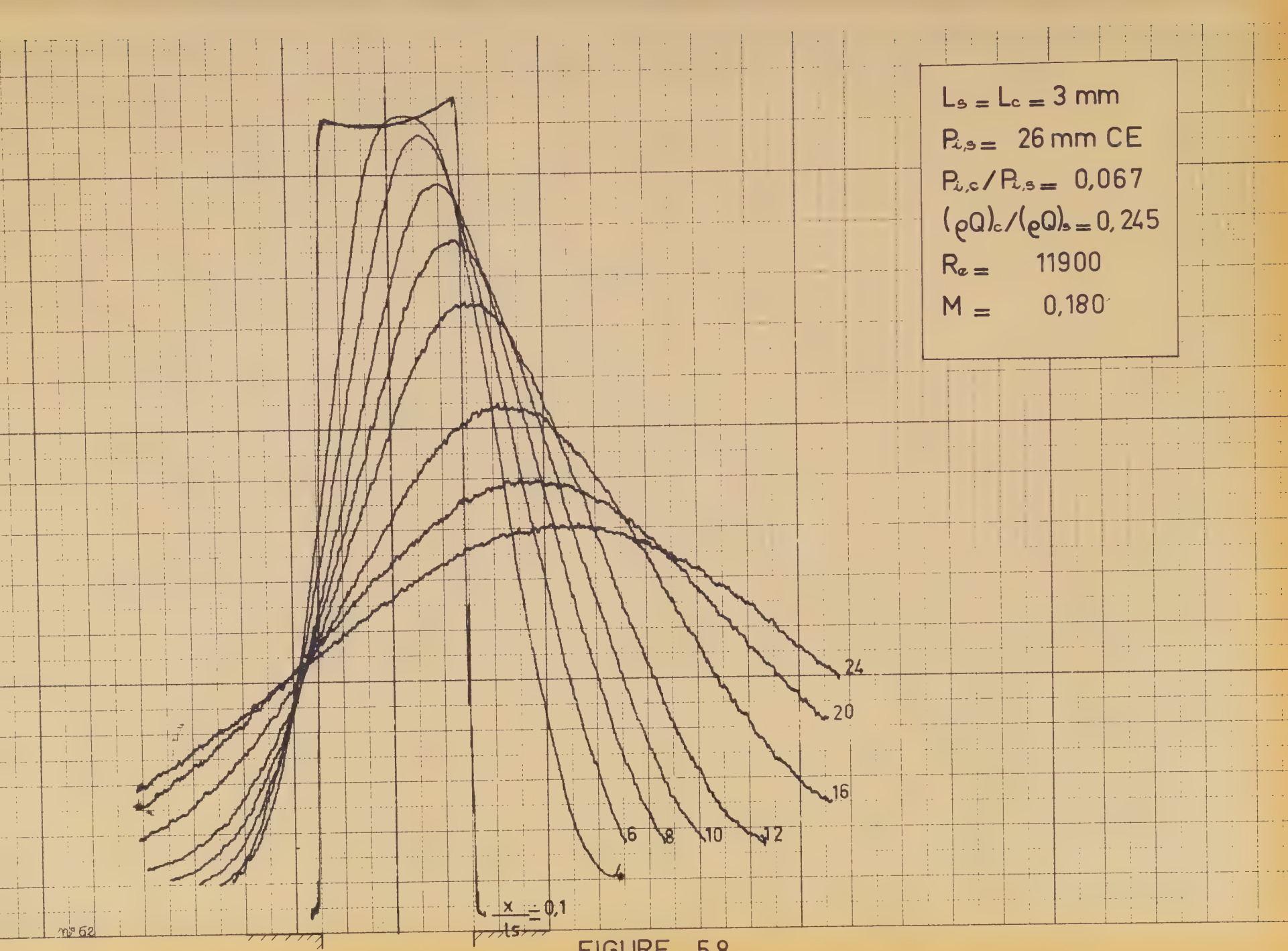

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,067
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s = 0,245$
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,180
24
20
16
12
10
8
6
$\frac{x}{l_s} = 0,1$
n° 62

FIGURE _ 58

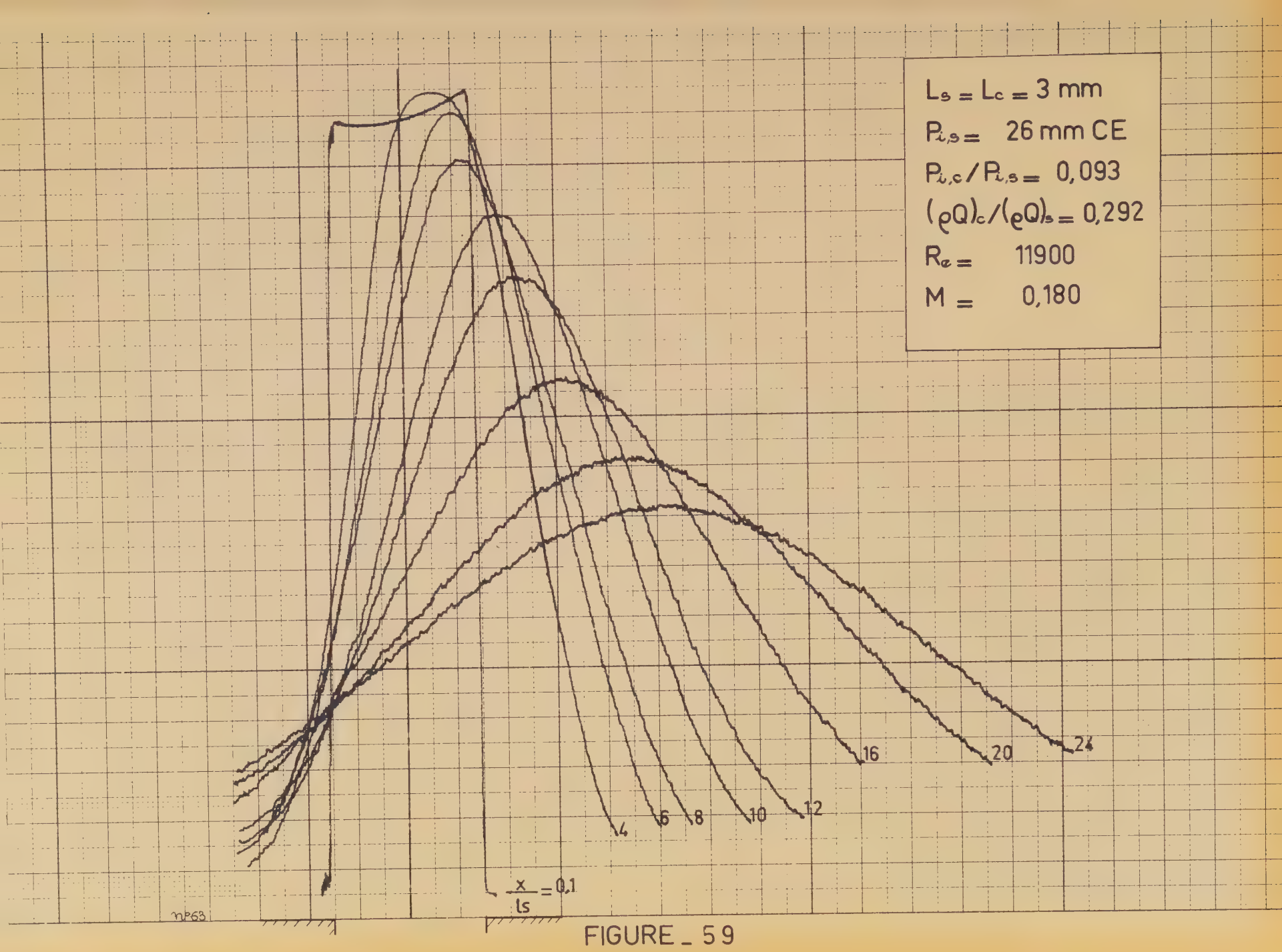

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,093
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,292
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,180
4
6
8
10
12
16
20
24
$\frac{x}{ls} = 0,1$

FIGURE _ 59

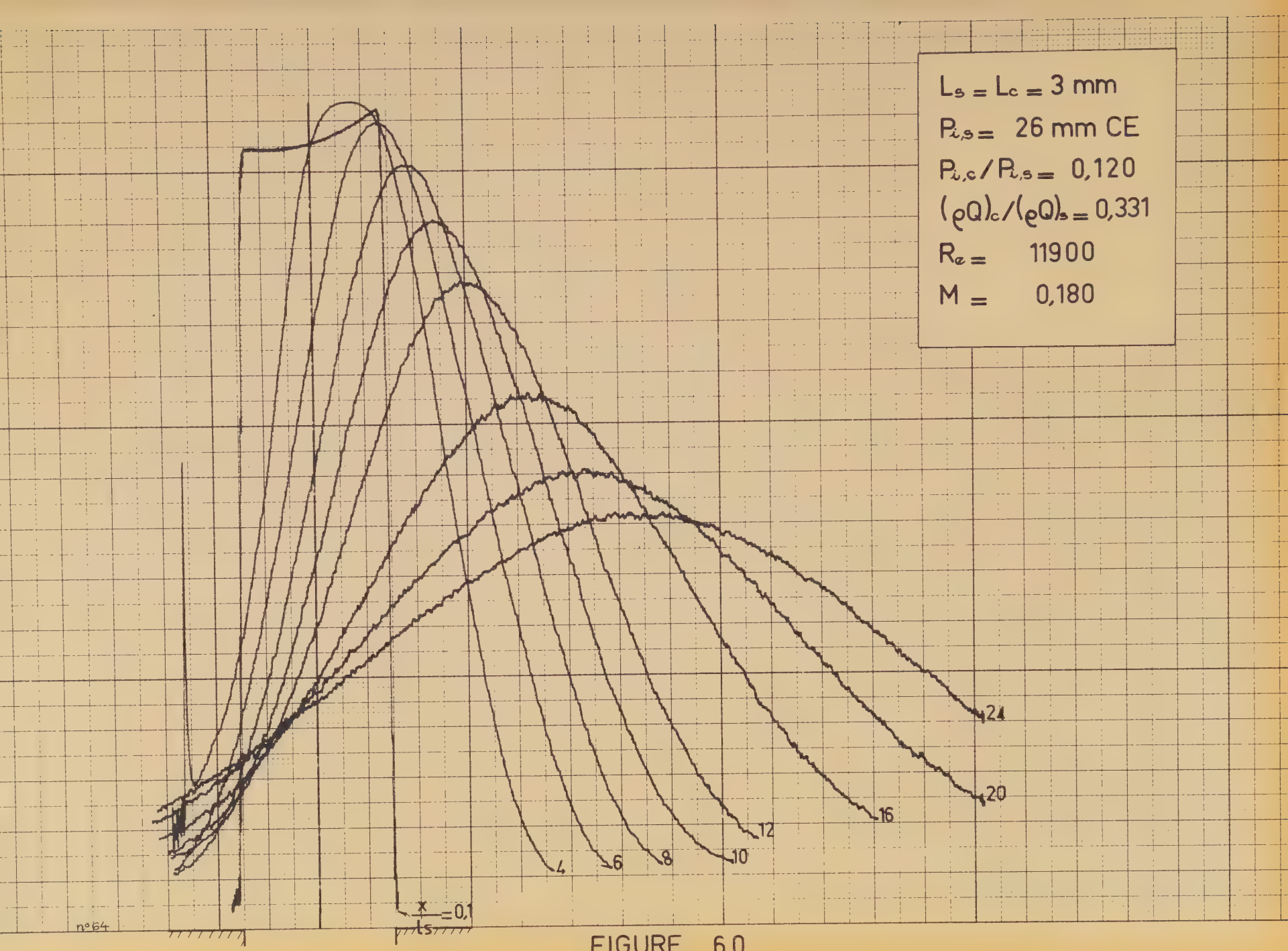

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,120
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,331
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,180
4
6
8
10
12
16
20
24
x = 0,1
ls
n°64

FIGURE _ 60

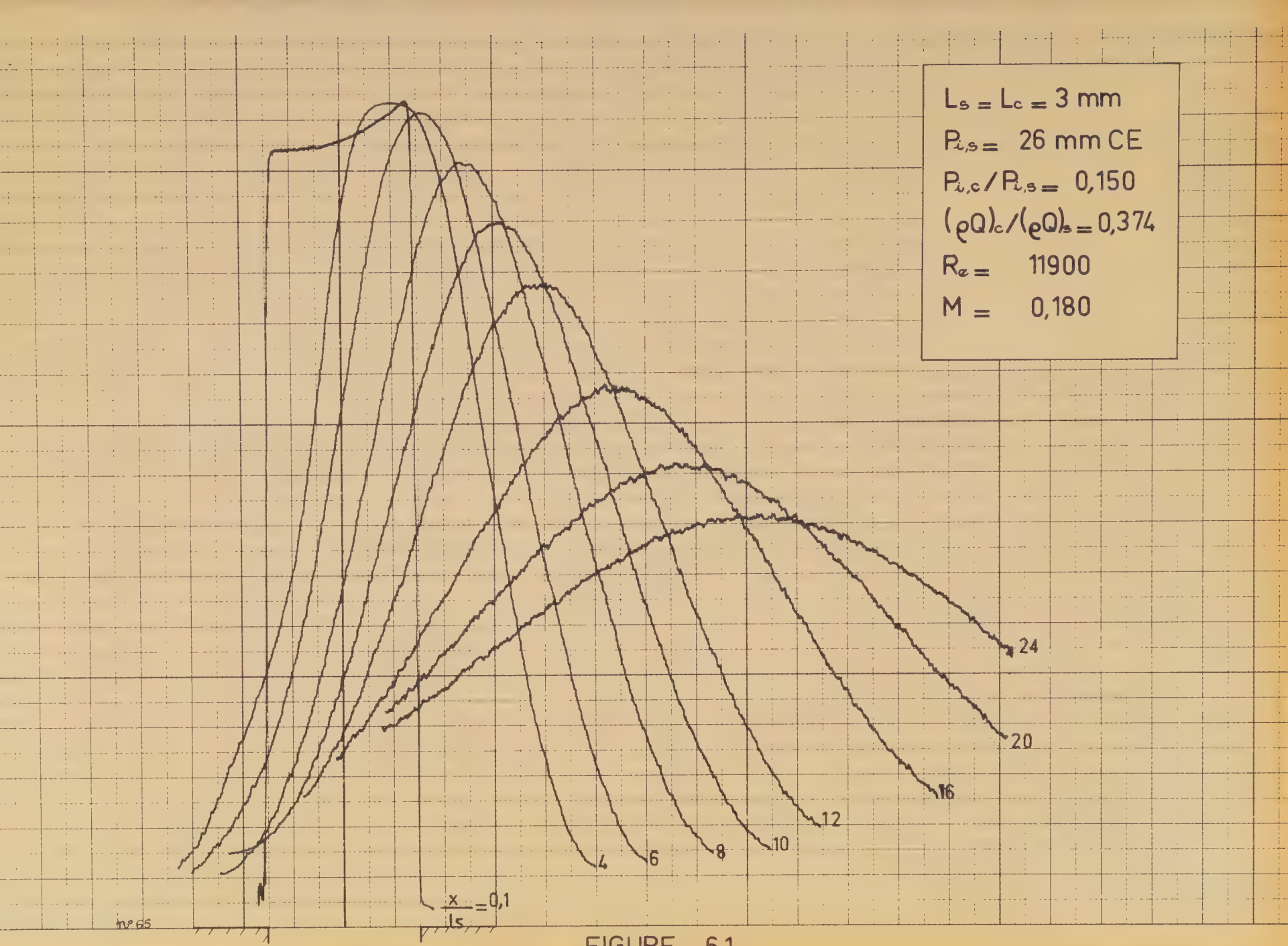

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,150
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,374
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,180
24
20
16
12
10
8
6
4
$\frac{x}{l_s} = 0,1$

FIGURE _ 61

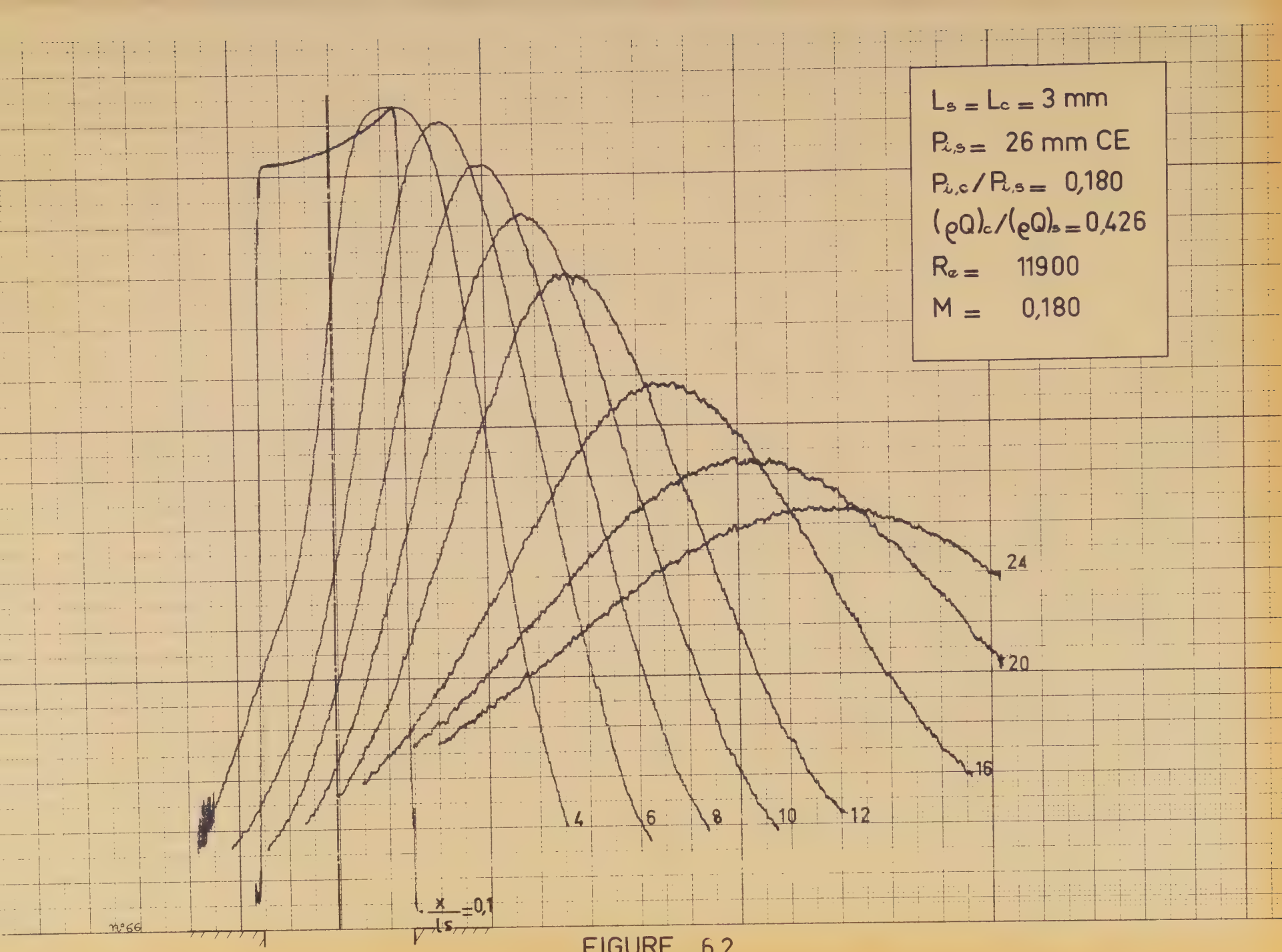

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,180
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s = 0{,}426$
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,180
24
20
16
12
10
8
6
4
$\frac{x}{l_s} = 0{,}1$
n°66

FIGURE _ 6 2

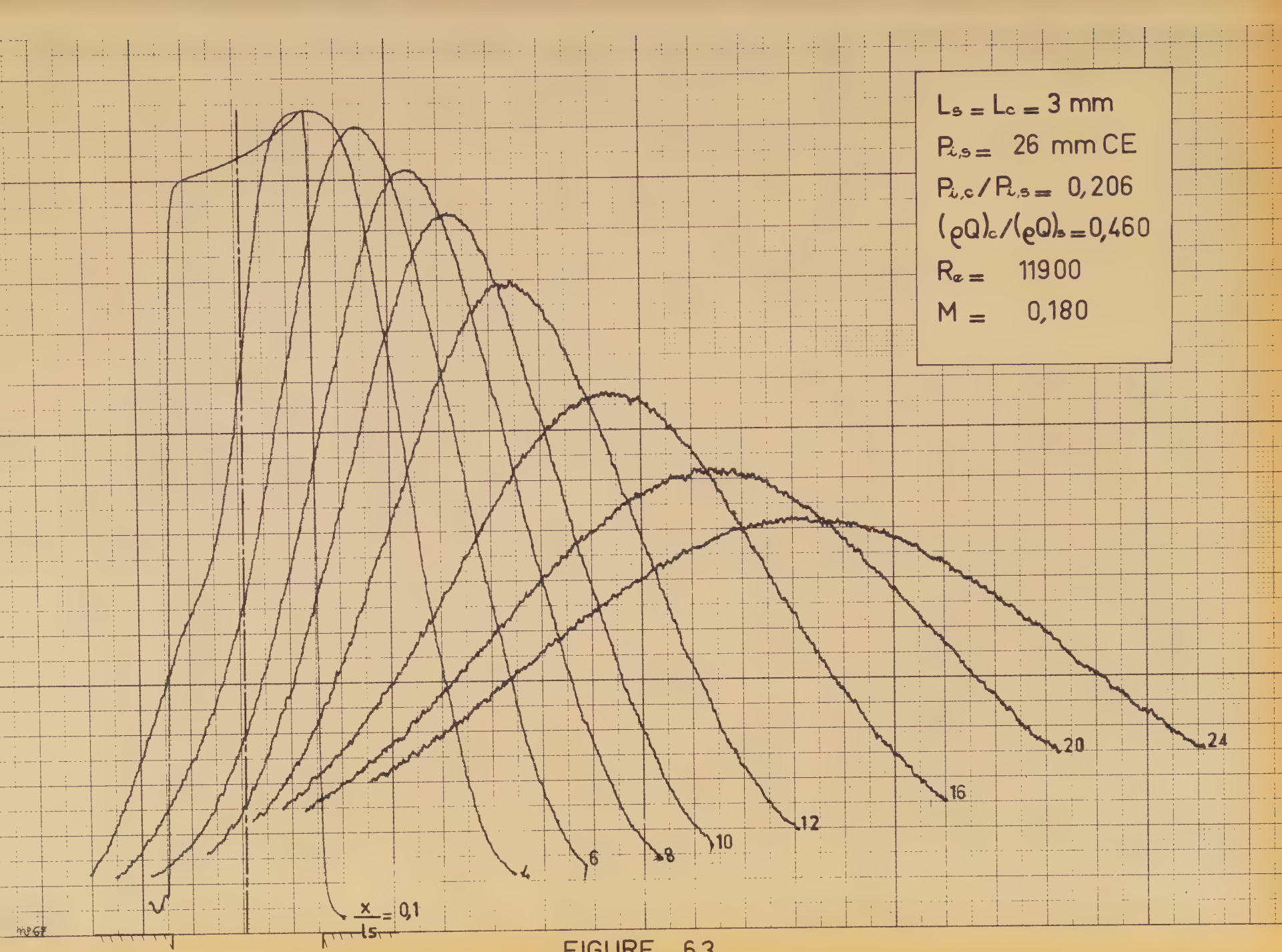

$L_s = L_c = 3$ mm
$P_{i,s} =$ 26 mm CE
$P_{i,c} / P_{i,s} =$ 0,206
$(\rho Q)_c / (\rho Q)_s =$ 0,460
$R_e =$ 11900
$M =$ 0,180
4
6
8
10
12
16
20
24
$\frac{x}{l_s} = 0,1$

FIGURE _ 63

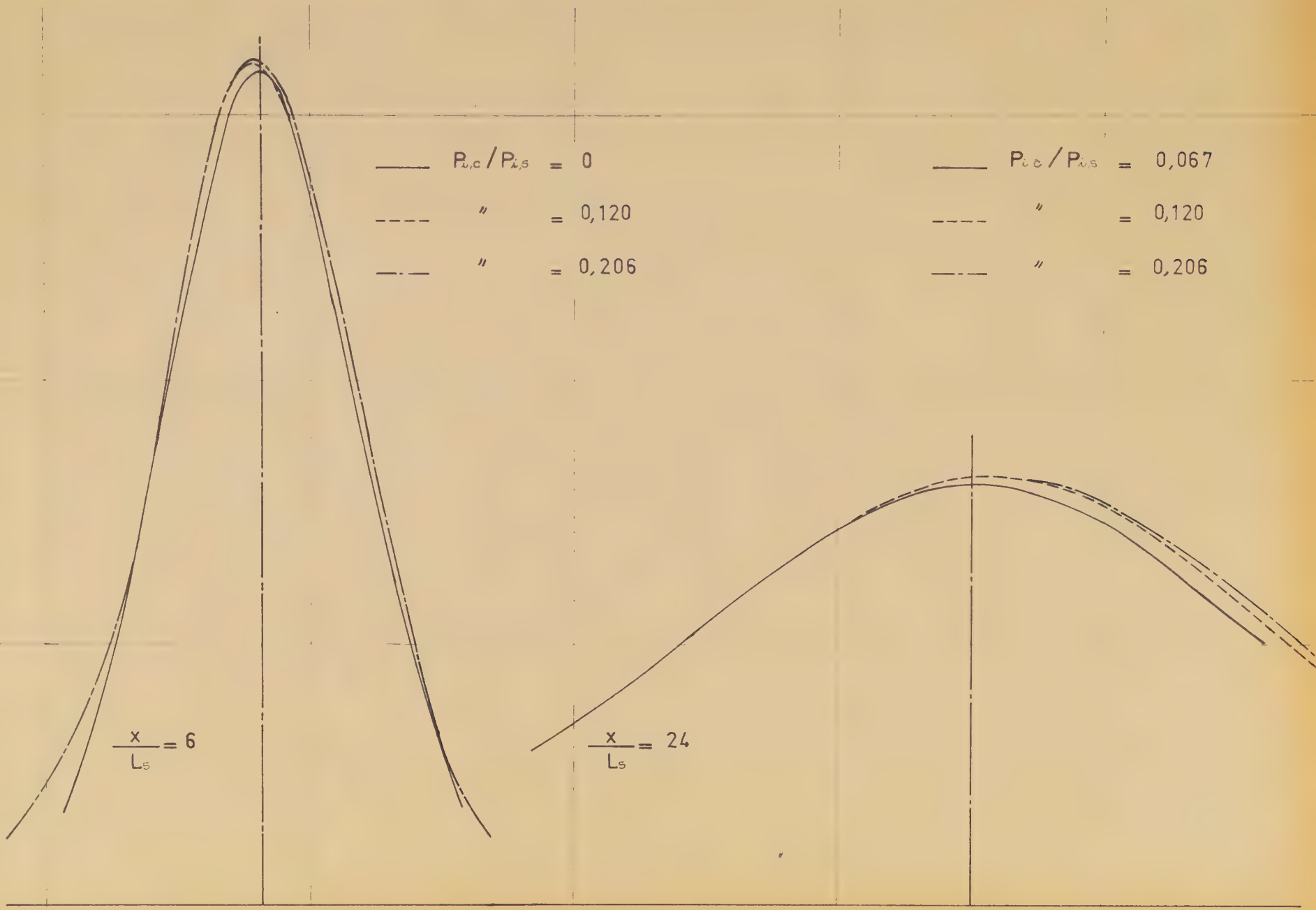

$P_{i,c}/P_{i,s}$ = 0
" = 0,120
" = 0,206
$P_{i,c}/P_{i,s}$ = 0,067
" = 0,120
" = 0,206
$\frac{x}{L_s} = 6$
$\frac{x}{L_s} = 24$

FIGURE_64

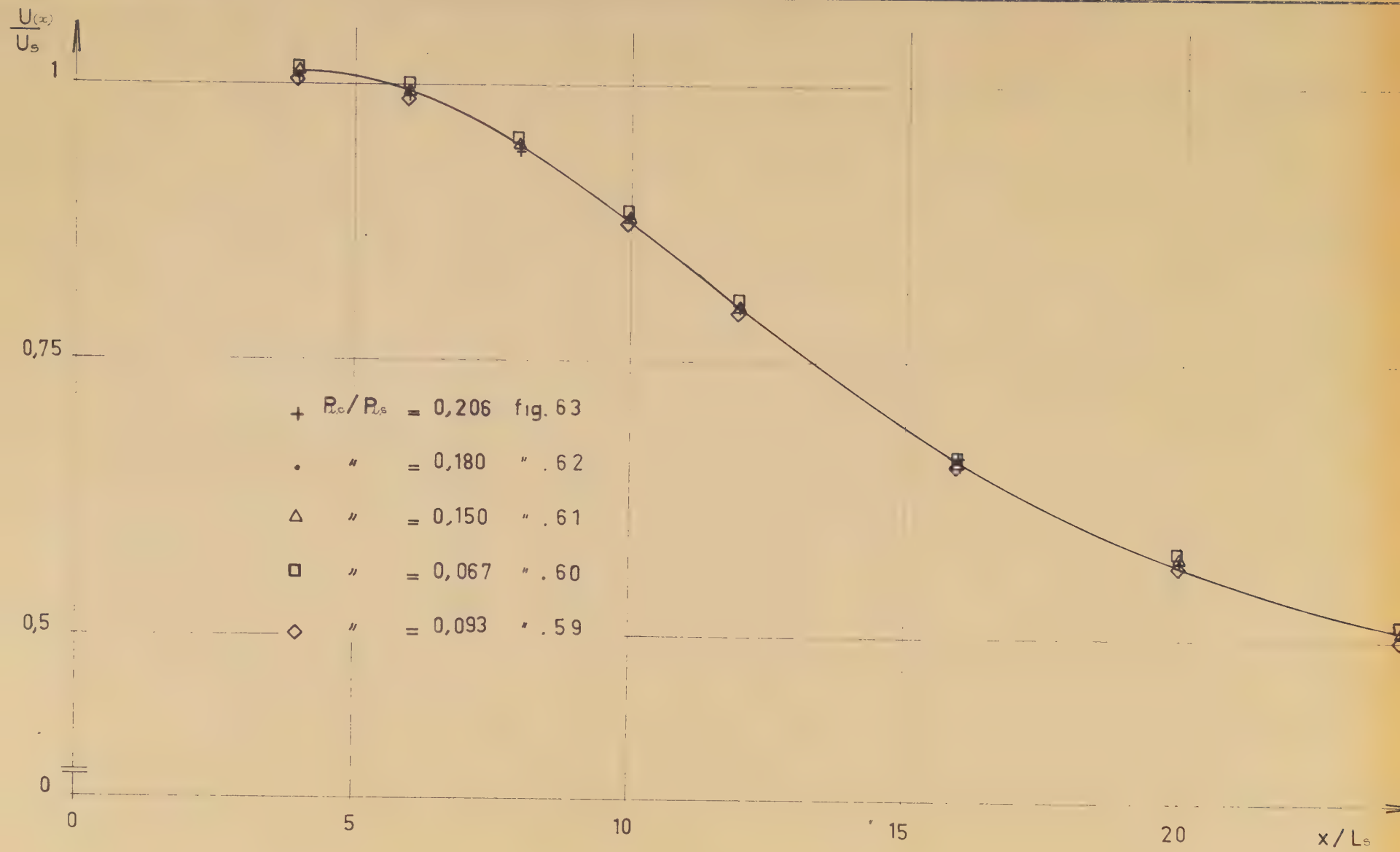

U(x)/Us
1
0,75
0,5
0
0
5
10
15
20
x/Ls
+ Pc/Ps = 0,206 fig. 63
• " = 0,180 " .62
△ " = 0,150 " .61
□ " = 0,067 " .60
◇ " = 0,093 " .59

FIGURE_65

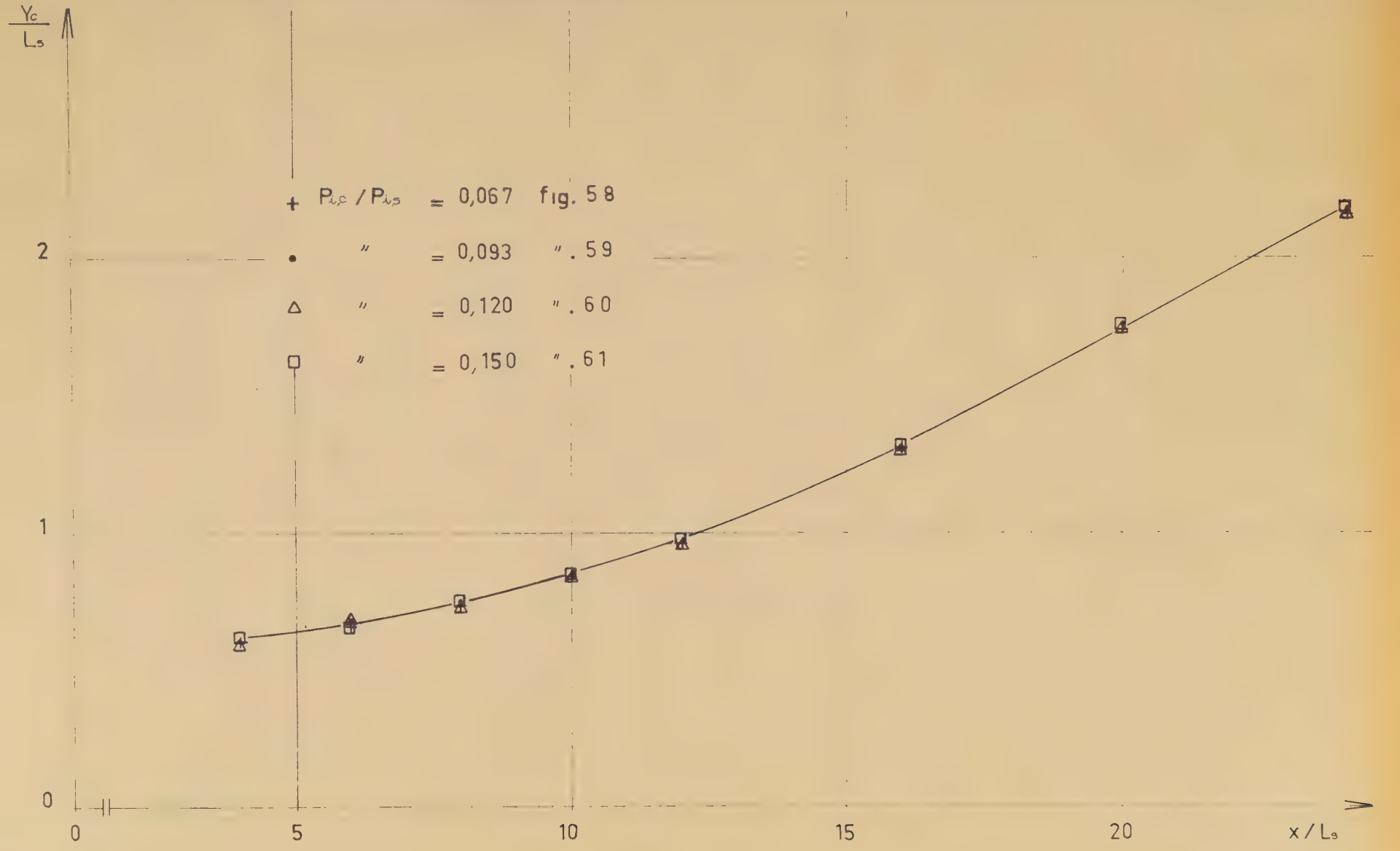

Yc / Ls
+ Pic / Pis = 0,067 fig. 58
• " = 0,093 ". 59
△ " = 0,120 ". 60
□ " = 0,150 ". 61
2
1
0
0
5
10
15
20
x / Ls

FIGURE_ 66

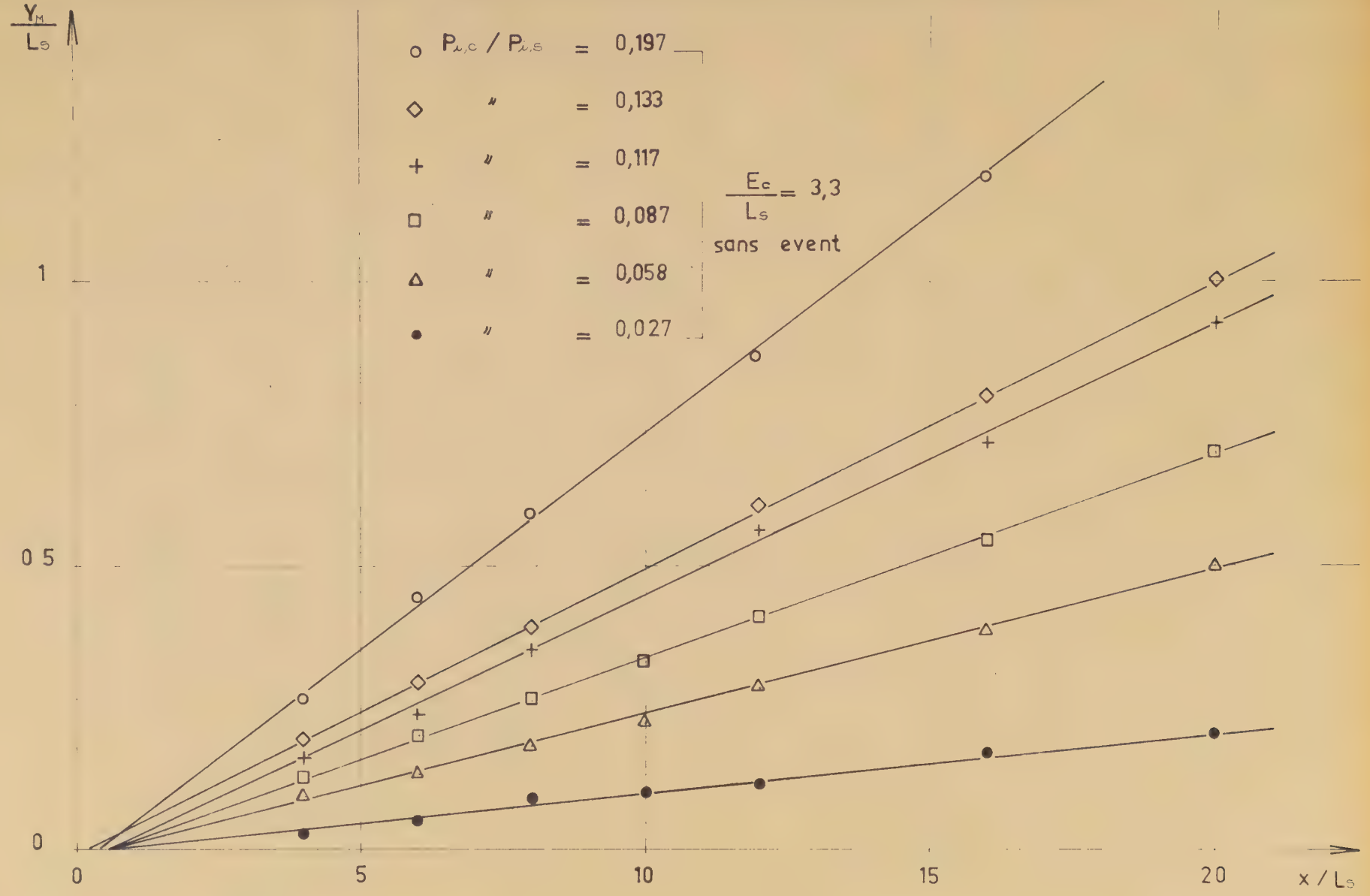

$\frac{Y_M}{L_s}$
$P_{\mu,c} / P_{\mu,s}$ = 0,197
" = 0,133
" = 0,117
" = 0,087
" = 0,058
" = 0,027
$\frac{E_c}{L_s}$ = 3,3
sans event
1
0 5
0
0
5
10
15
20
x / Ls

FIGURE _ 67

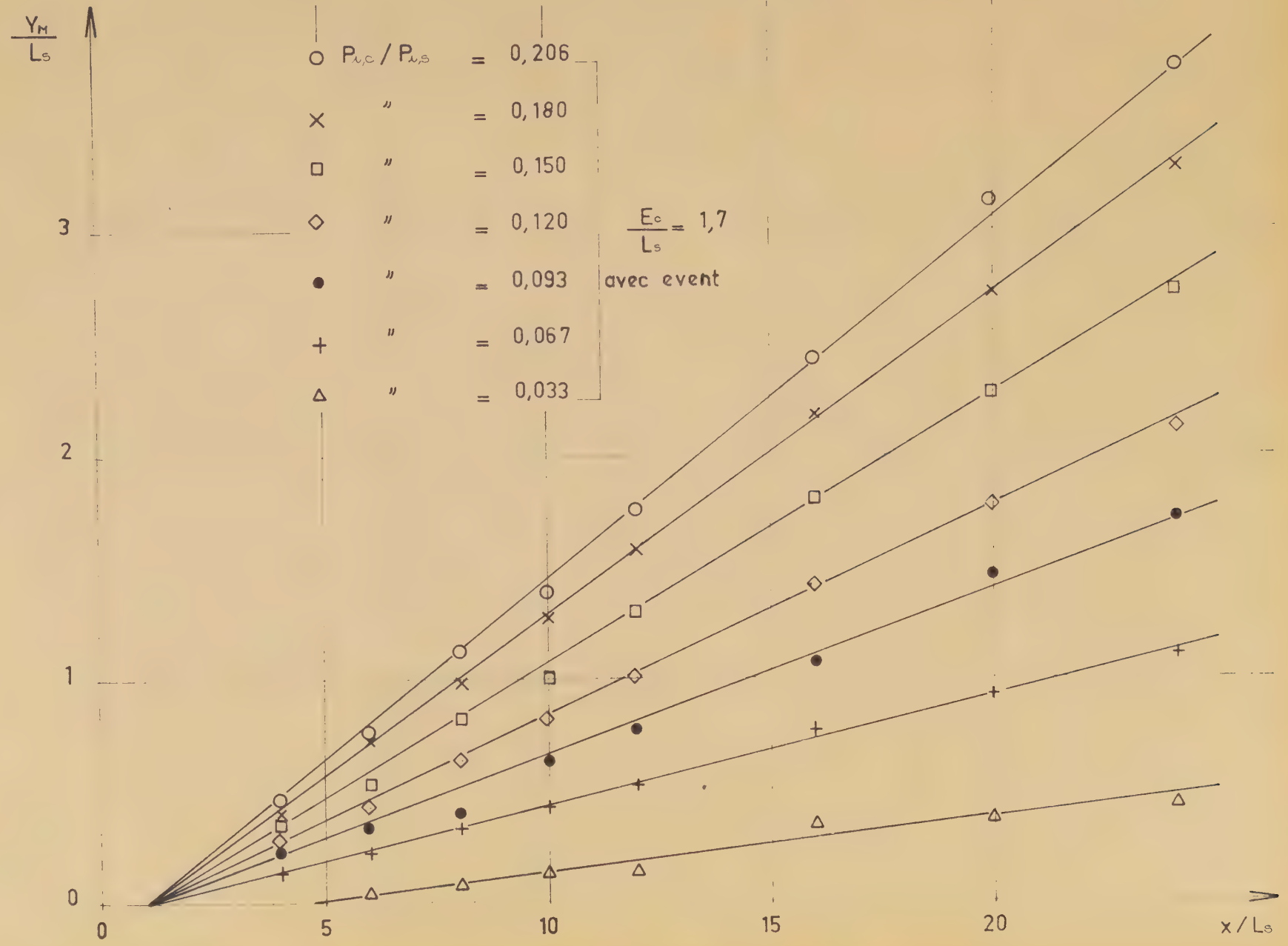

$\frac{Y_M}{L_s}$
○ $P_{i,c} / P_{i,s}$ = 0,206
× " = 0,180
□ " = 0,150
◇ " = 0,120
● " = 0,093
+ " = 0,067
△ " = 0,033
$\frac{E_c}{L_s}$ = 1,7
avec event
3
2
1
0
0
5
10
15
20
x / Ls

FIGURE_ 68

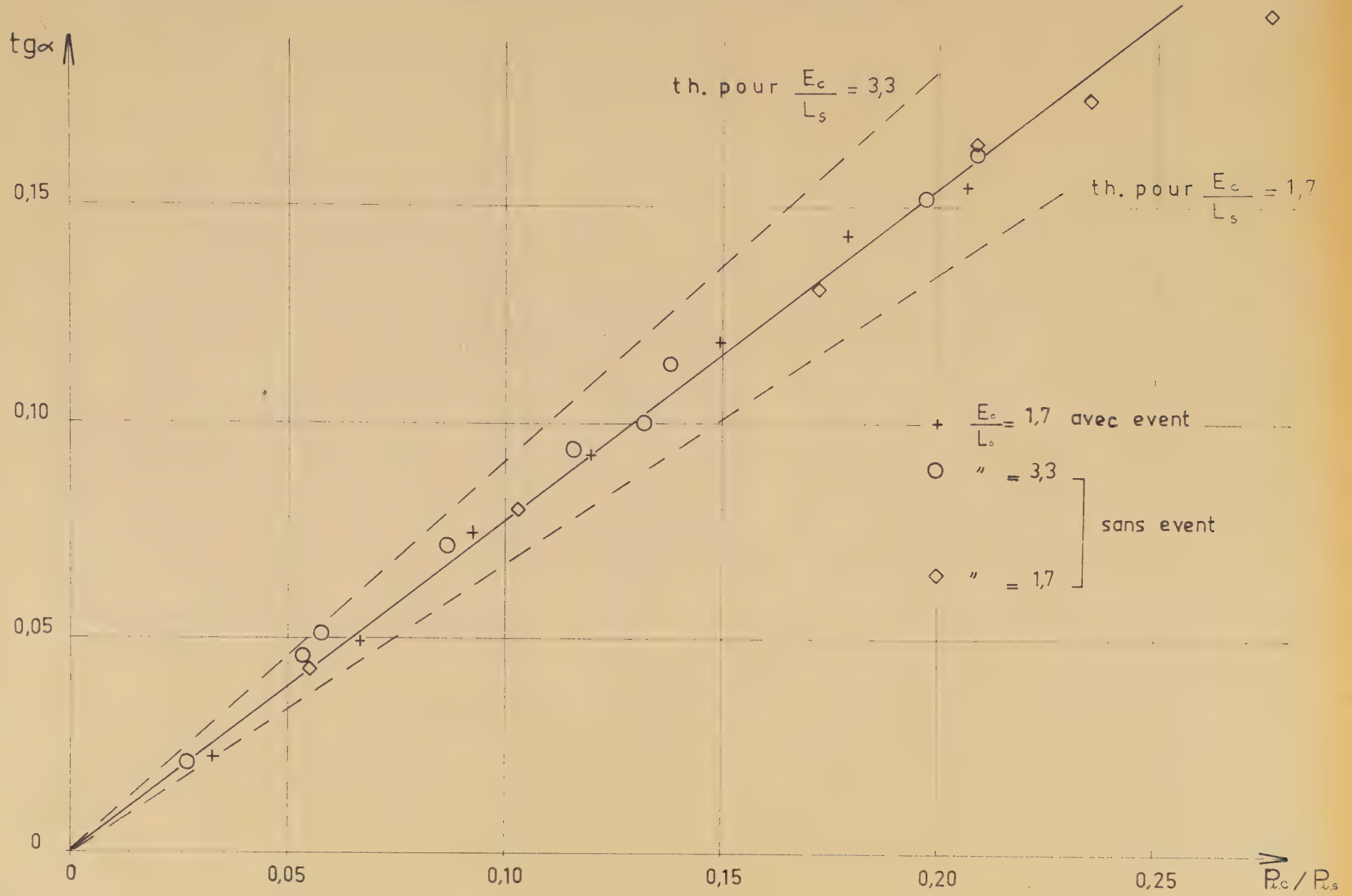

tgα
0,15
0,10
0,05
0
0
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
$\overline{P_{t,c}} / P_{t,s}$
th. pour $\frac{E_c}{L_s} = 3,3$
th. pour $\frac{E_c}{L_s} = 1,7$
+ $\frac{E_c}{L_s} = 1,7$ avec event
○ " = 3,3
sans event
◇ " = 1,7

FIGURE_ 69

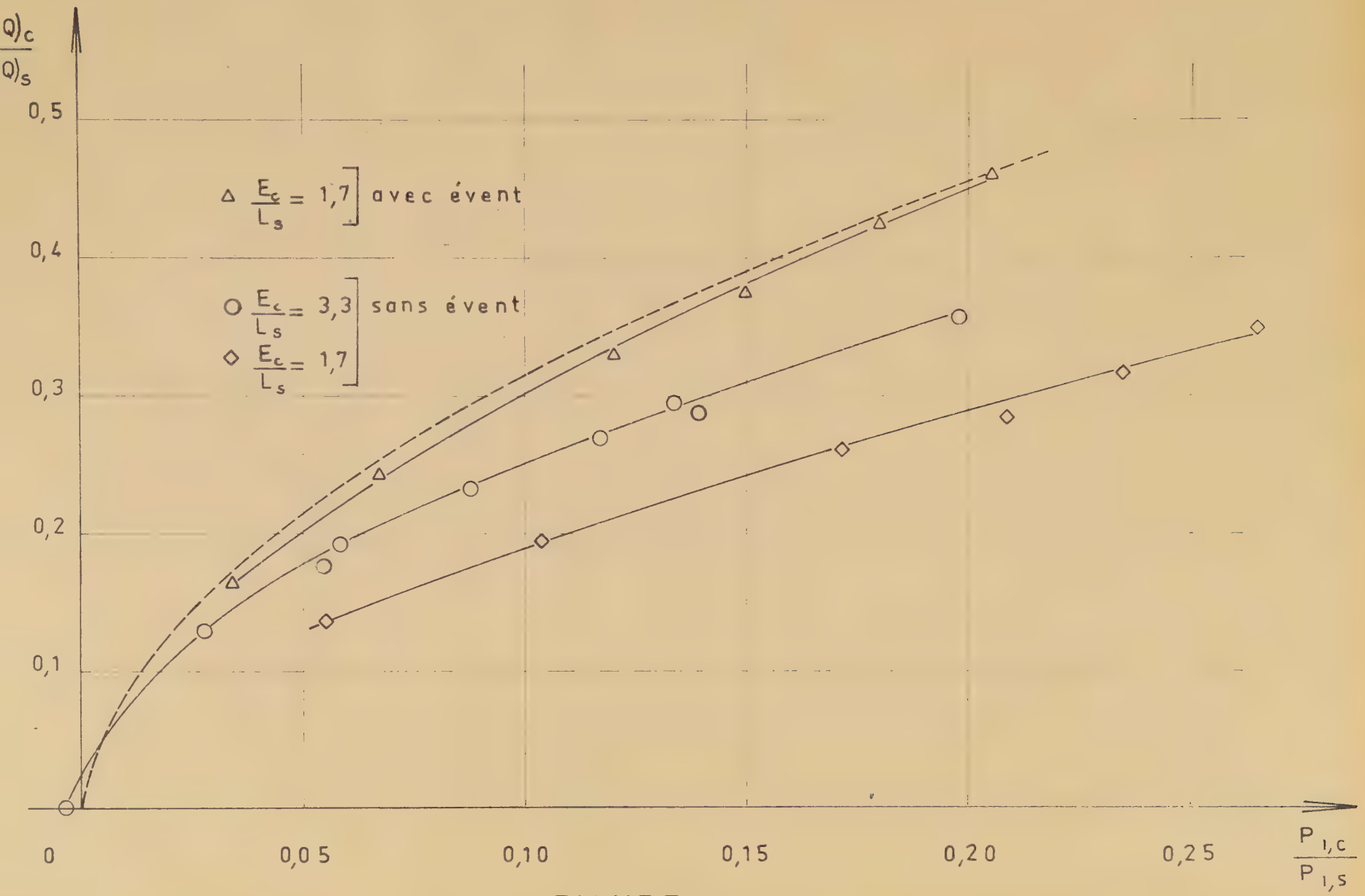

Q)c / Q)s
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
P1,c / P1,s
△ Ec/Ls = 1,7 avec évent
○ Ec/Ls = 3,3 sans évent
◇ Ec/Ls = 1,7

FIGURE _ 70

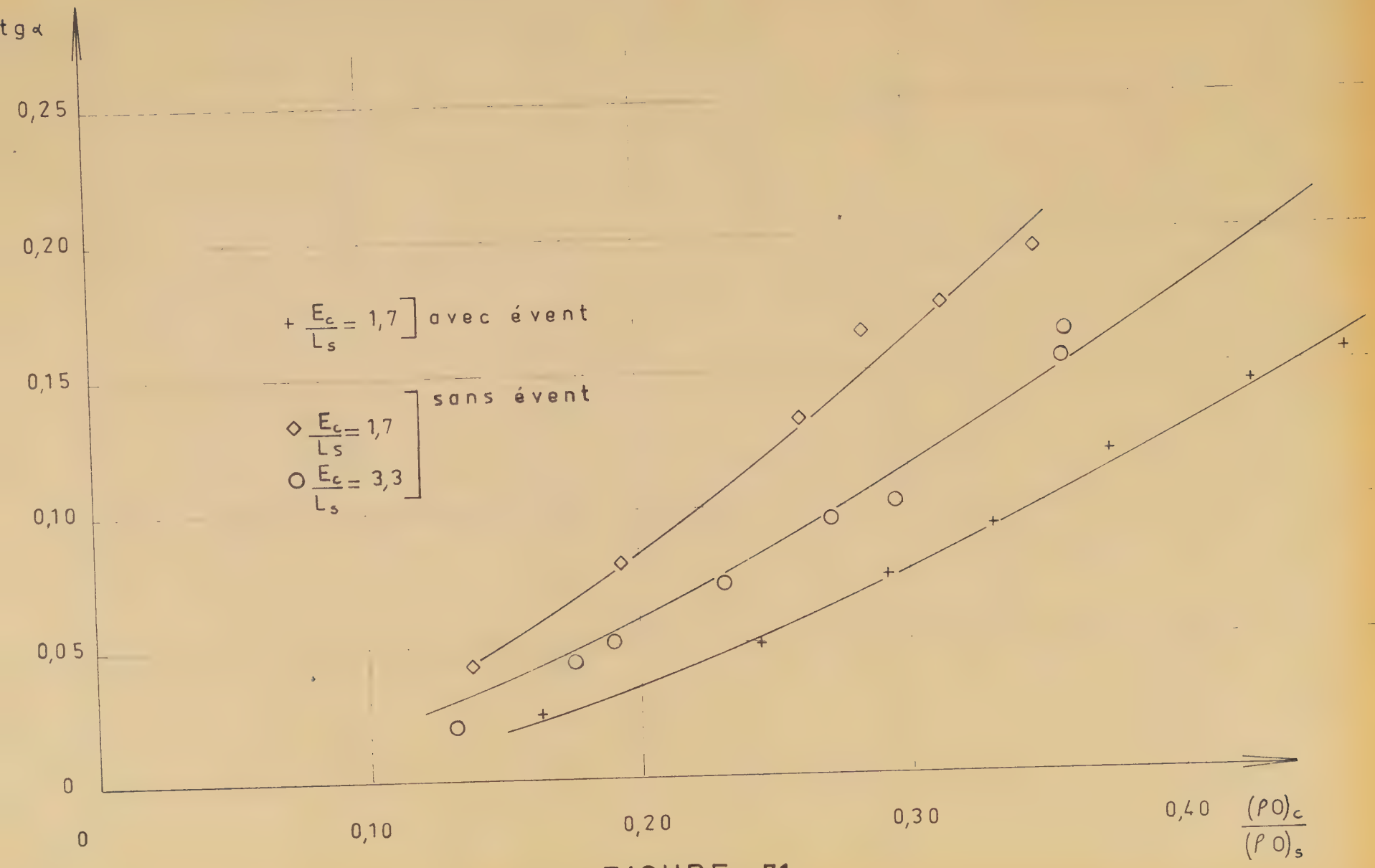

tg α
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
0
0,10
0,20
0,30
0,40
(PO)c / (PO)s
+ Ec/Ls = 1,7] avec évent
sans évent
◇ Ec/Ls = 1,7
○ Ec/Ls = 3,3

FIGURE_71

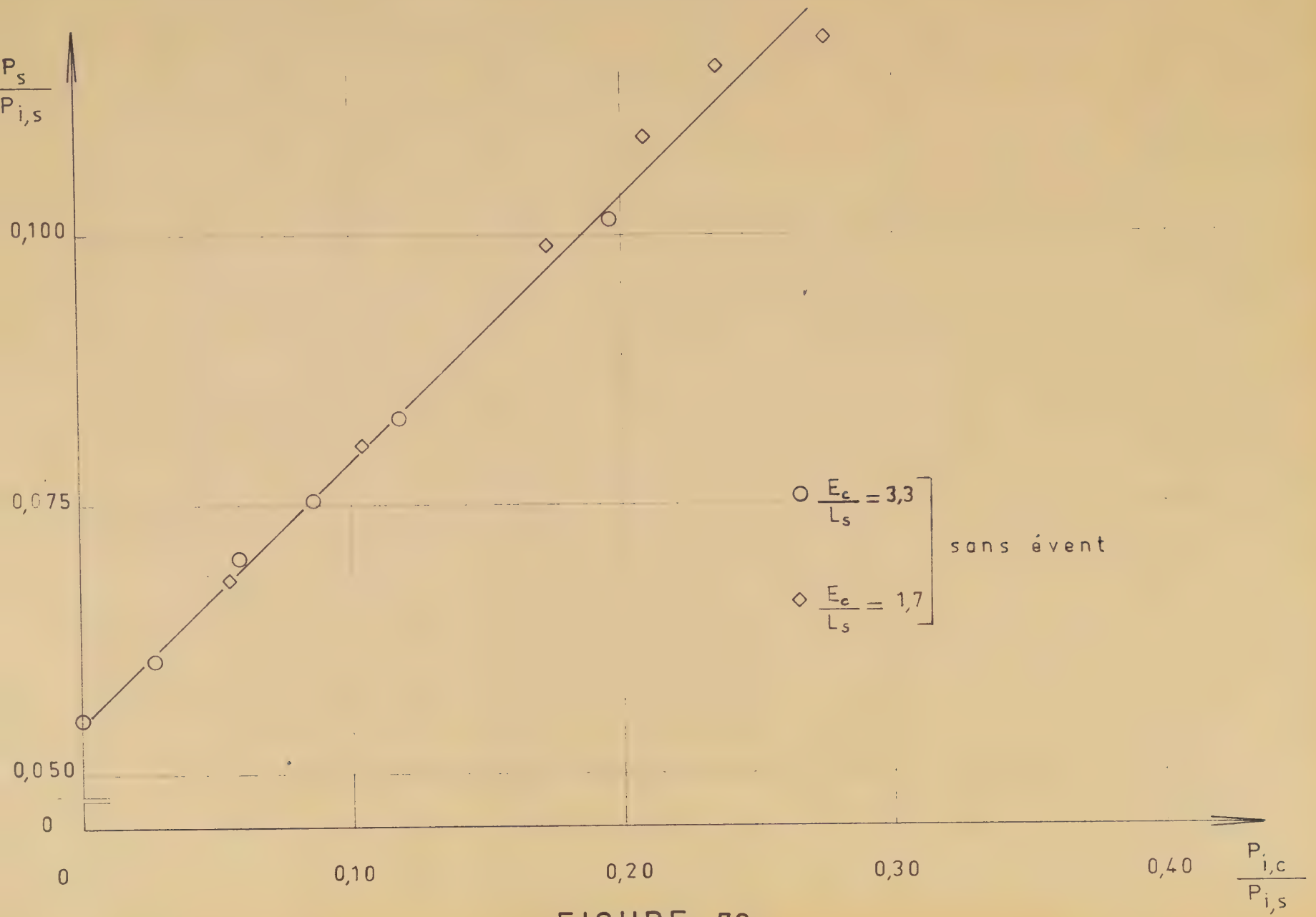

$\frac{P_s}{P_{i,s}}$
0,100
0,075
0,050
0
0
0,10
0,20
0,30
0,40
$\frac{P_{i,c}}{P_{i,s}}$
$\frac{E_c}{L_s} = 3,3$
$\frac{E_c}{L_s} = 1,7$
sans évent

FIGURE_72

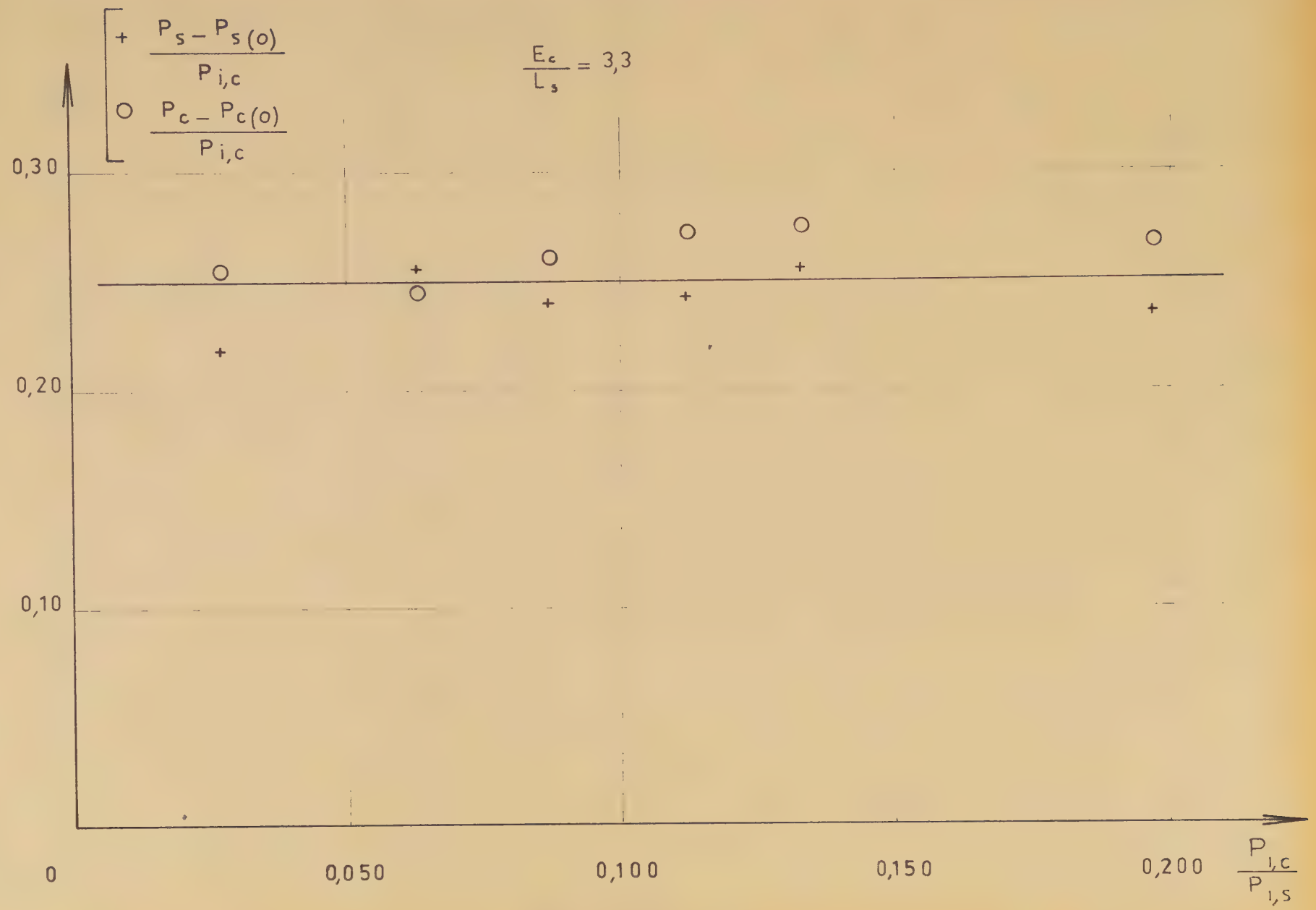

+ $\frac{P_s - P_{s(o)}}{P_{i,c}}$
○ $\frac{P_c - P_{c(o)}}{P_{i,c}}$
$\frac{E_c}{L_s} = 3,3$
0,30
0,20
0,10
0
0,050
0,100
0,150
0,200
$\frac{P_{i,c}}{P_{i,s}}$

FIGURE_73

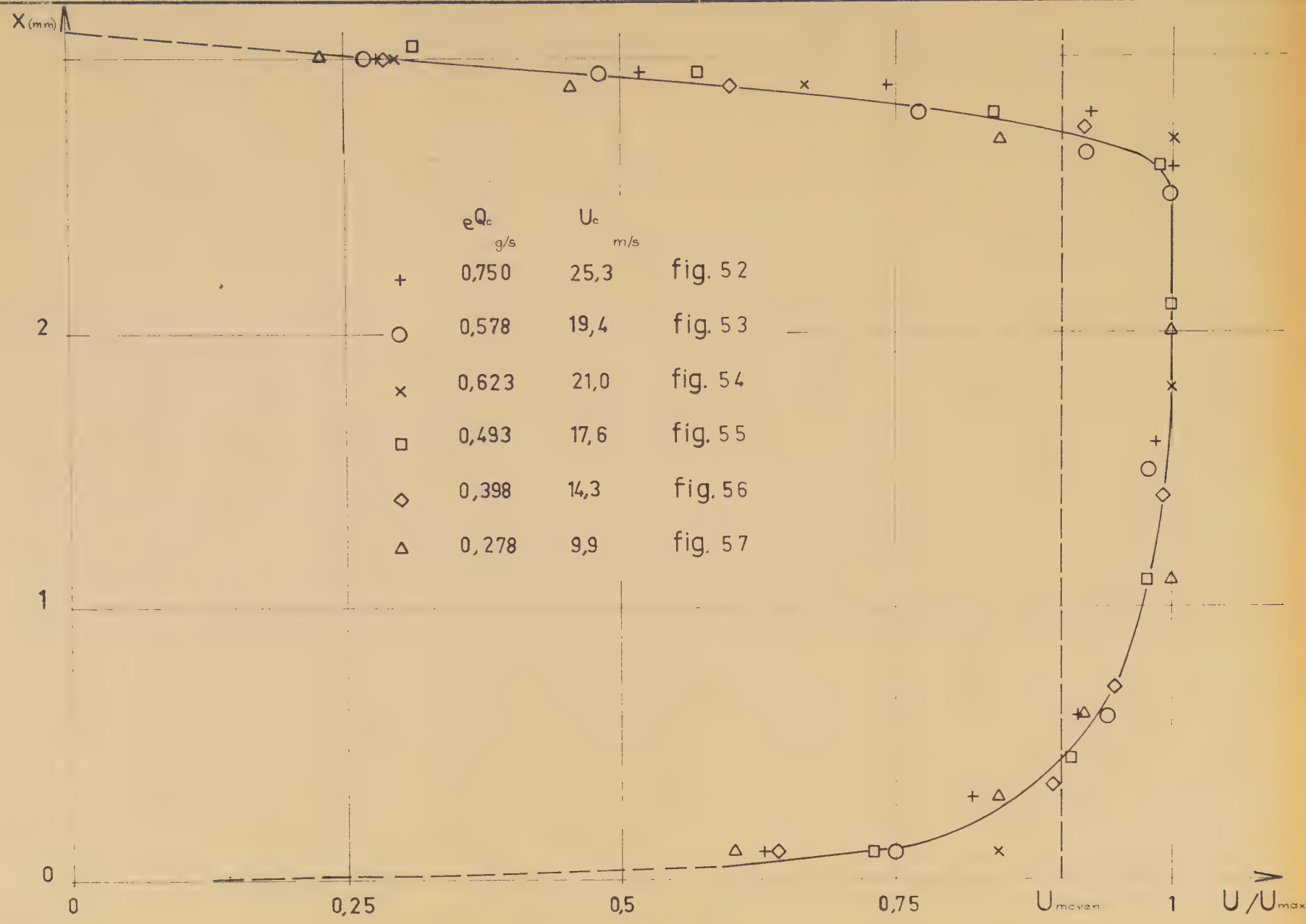

X (mm)
2
1
0
0
0,25
0,5
0,75
U moyen
1
U/Umax
eQc g/s
Uc m/s
+ 0,750 25,3 fig. 52
○ 0,578 19,4 fig. 53
× 0,623 21,0 fig. 54
□ 0,493 17,6 fig. 55
◇ 0,398 14,3 fig. 56
△ 0,278 9,9 fig. 57

FIGURE _74

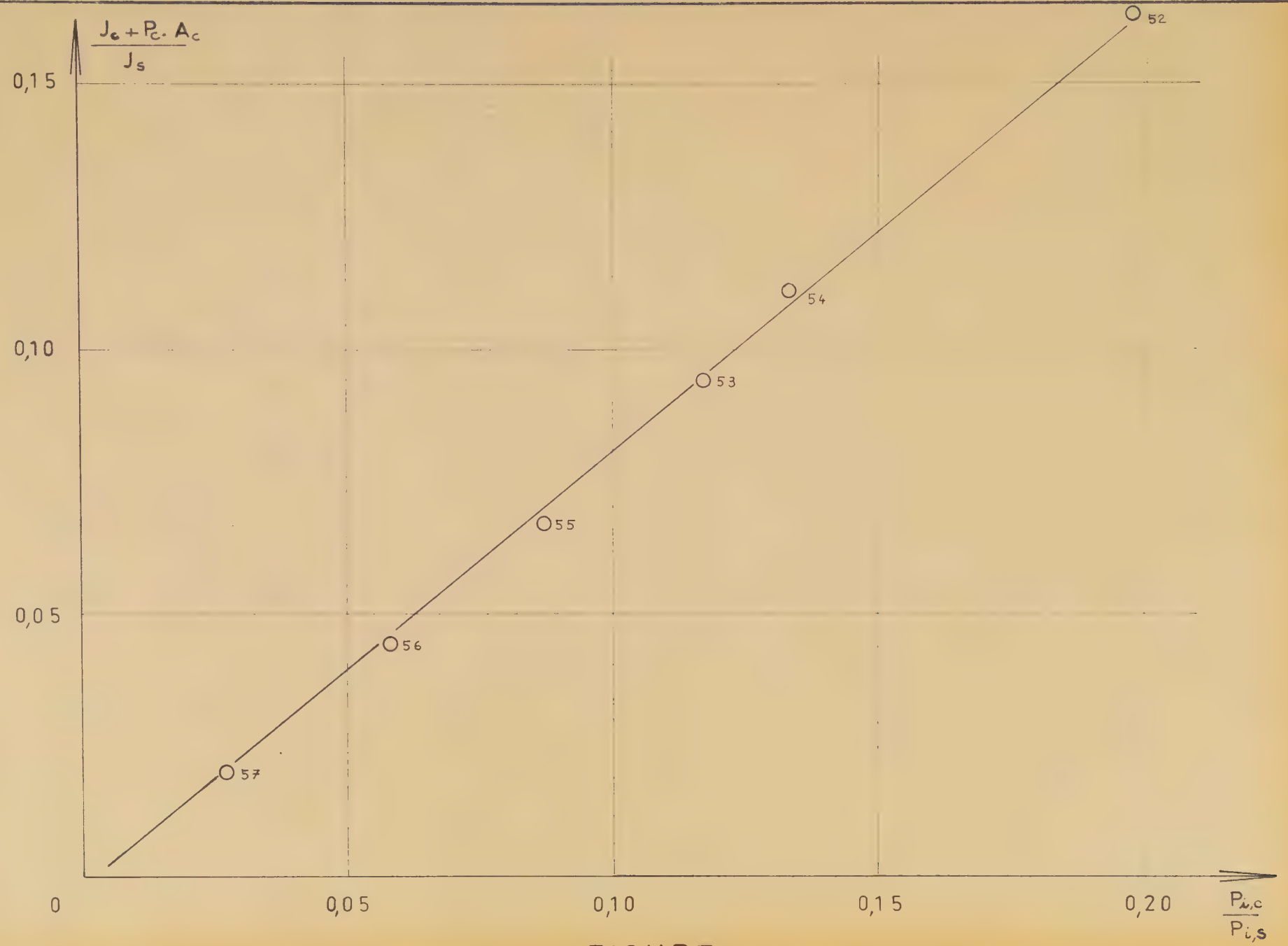

$\frac{J_c + P_c \cdot A_c}{J_s}$
0,15
0,10
0,05
0
0,05
0,10
0,15
0,20
$\frac{P_{i,c}}{P_{i,s}}$
52
54
53
55
56
57

FIGURE_75

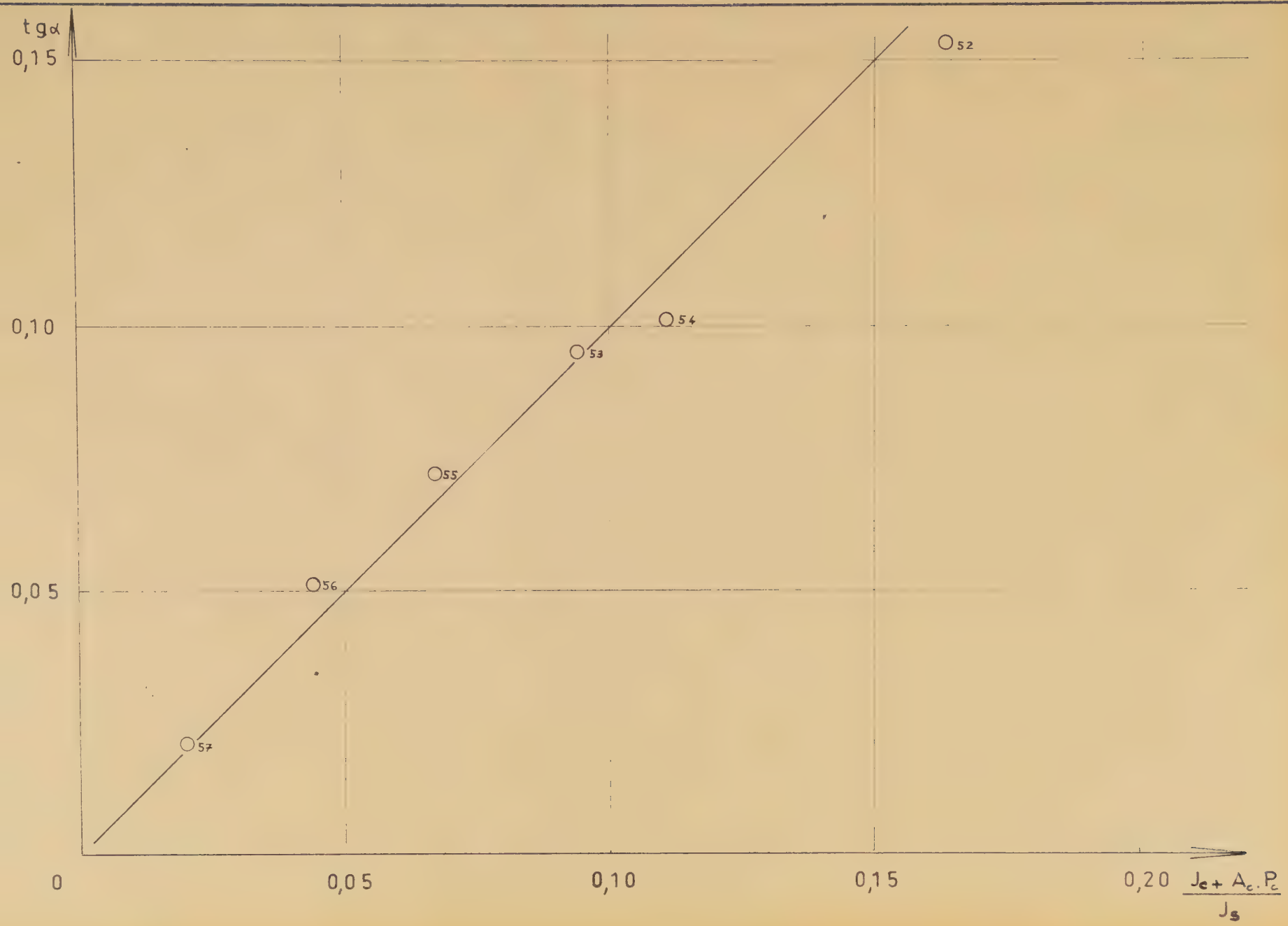


FIGURE_76

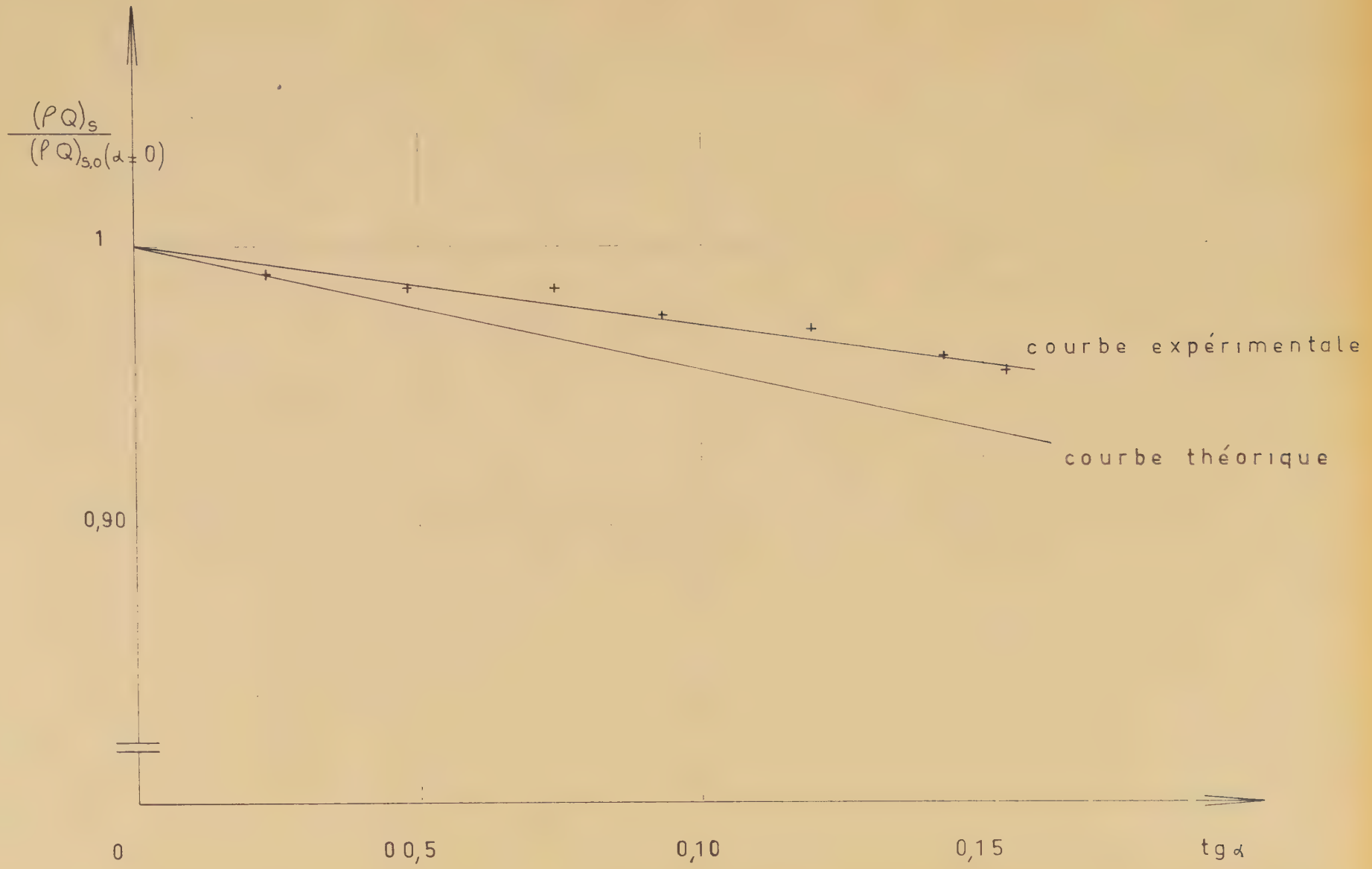

$\frac{(PQ)_s}{(PQ)_{s,0}(\alpha = 0)}$
1
0,90
courbe expérimentale
courbe théorique
0
0 0,5
0,10
0,15
tg α

FIGURE_77a

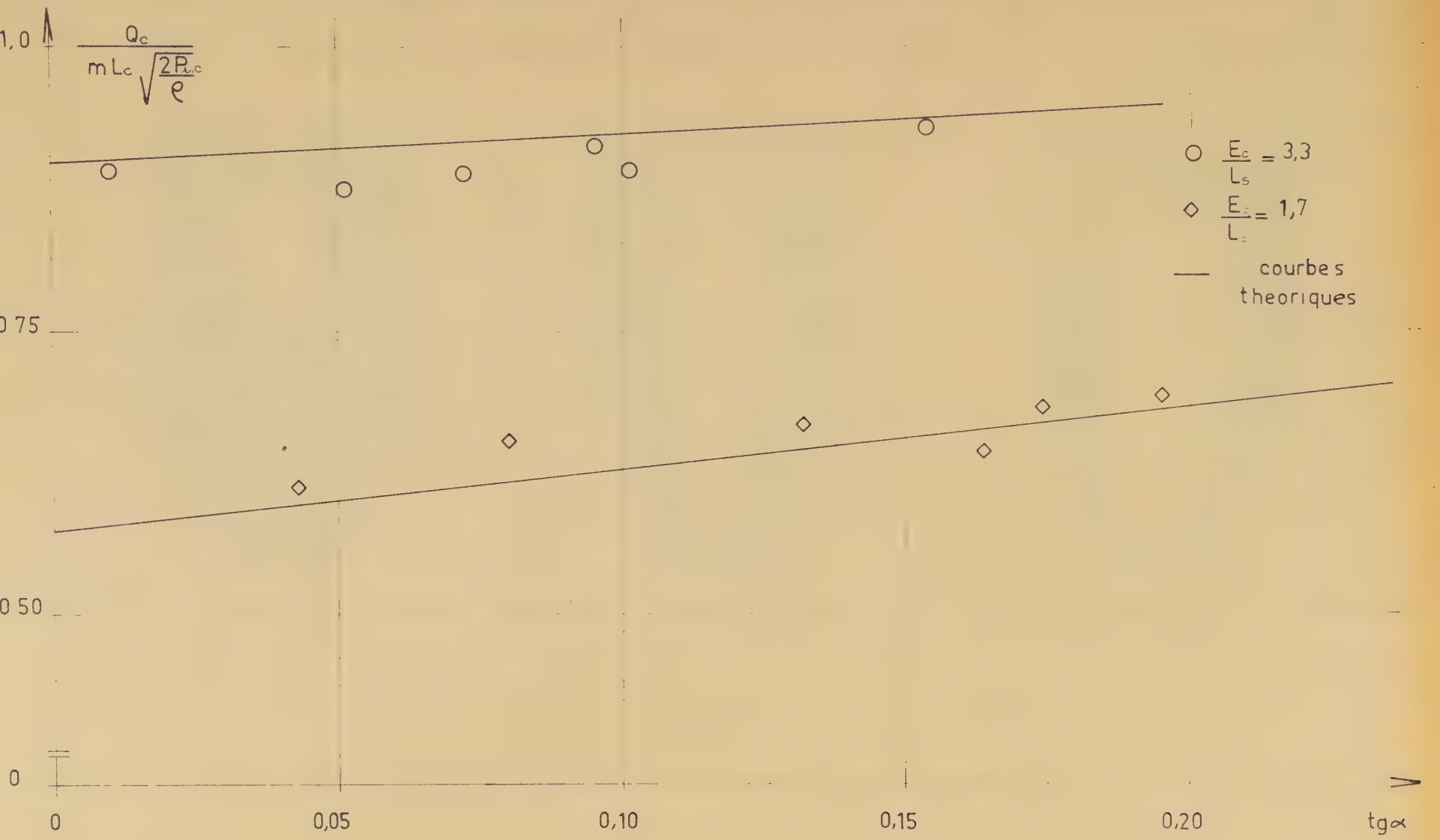

1,0
$\frac{Q_c}{m L_c \sqrt{\frac{2 P_{u,c}}{e}}}$
0 75
0 50
0
0
0,05
0,10
0,15
0,20
tg∝
$\frac{E_c}{L_s} = 3,3$
$\frac{E_s}{L_s} = 1,7$
courbes theoriques

FIGURE _ 77 b

Buse n° 1

Buse n° 2

Buse n° 3

FIGURE_ 78

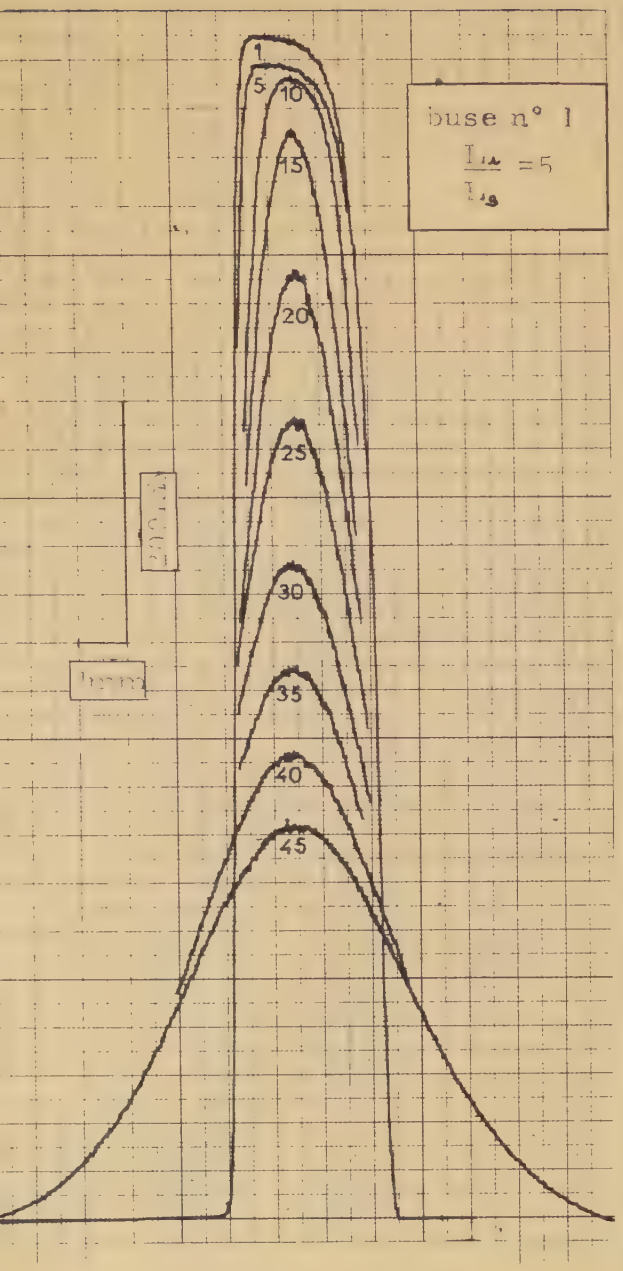


FIGURE_79 a

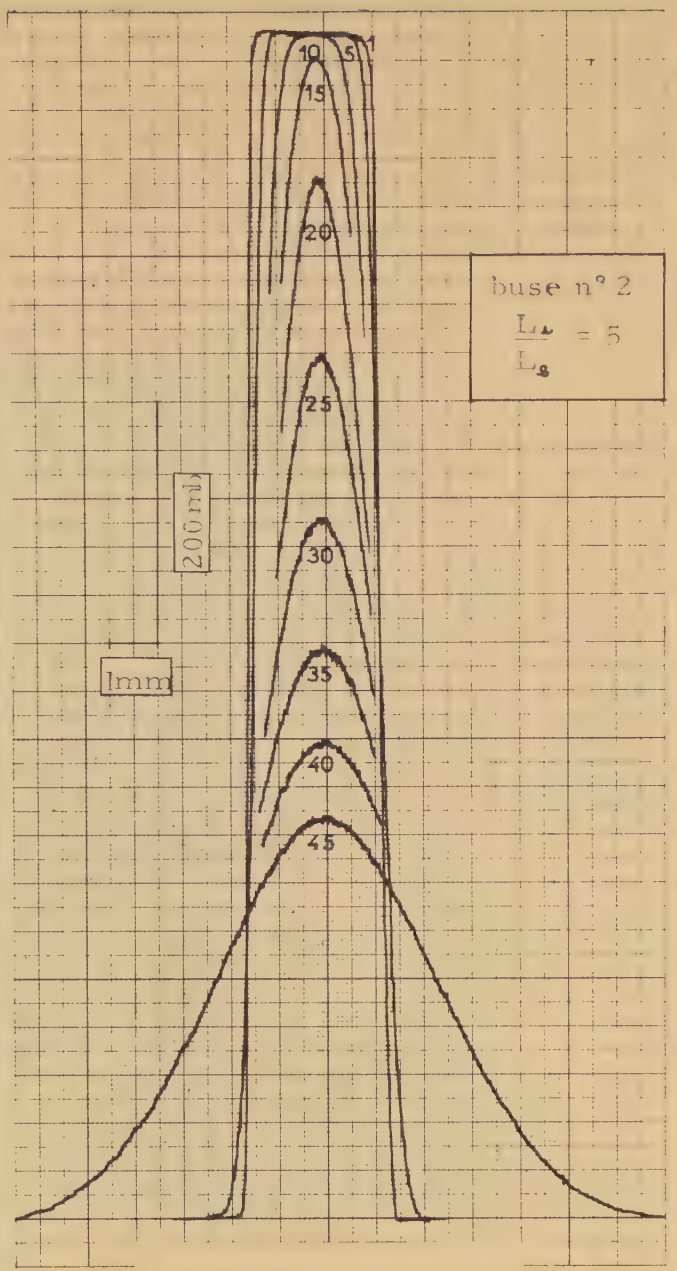


FIGURE_79 b

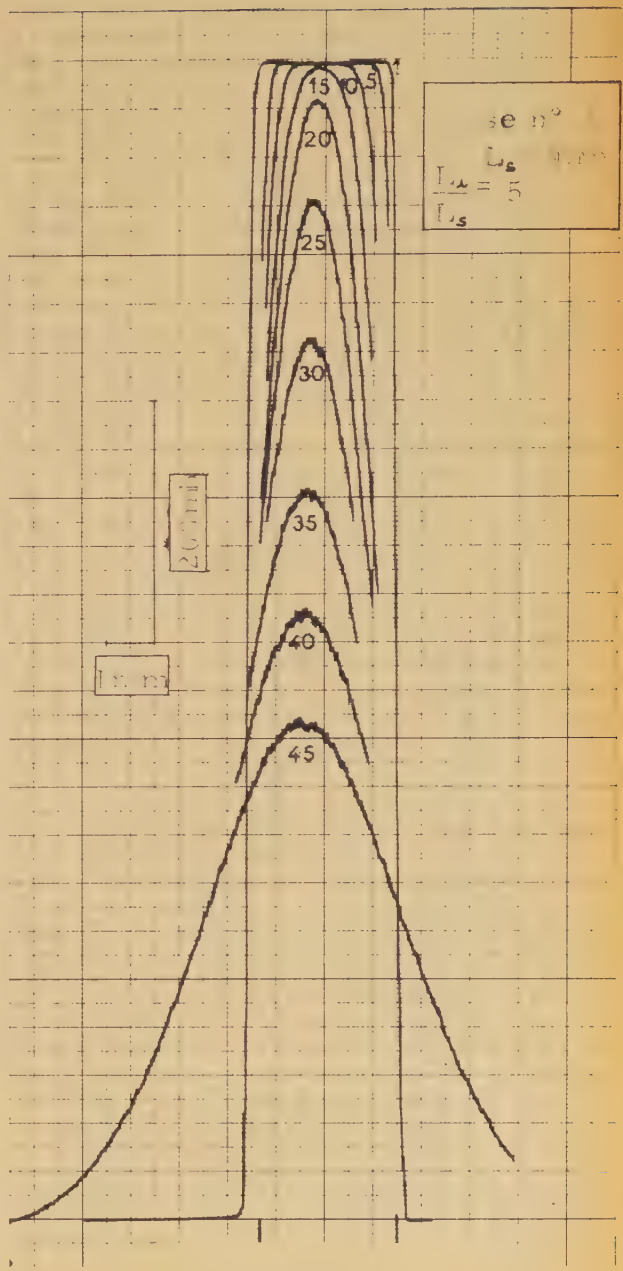


FIGURE_79 c

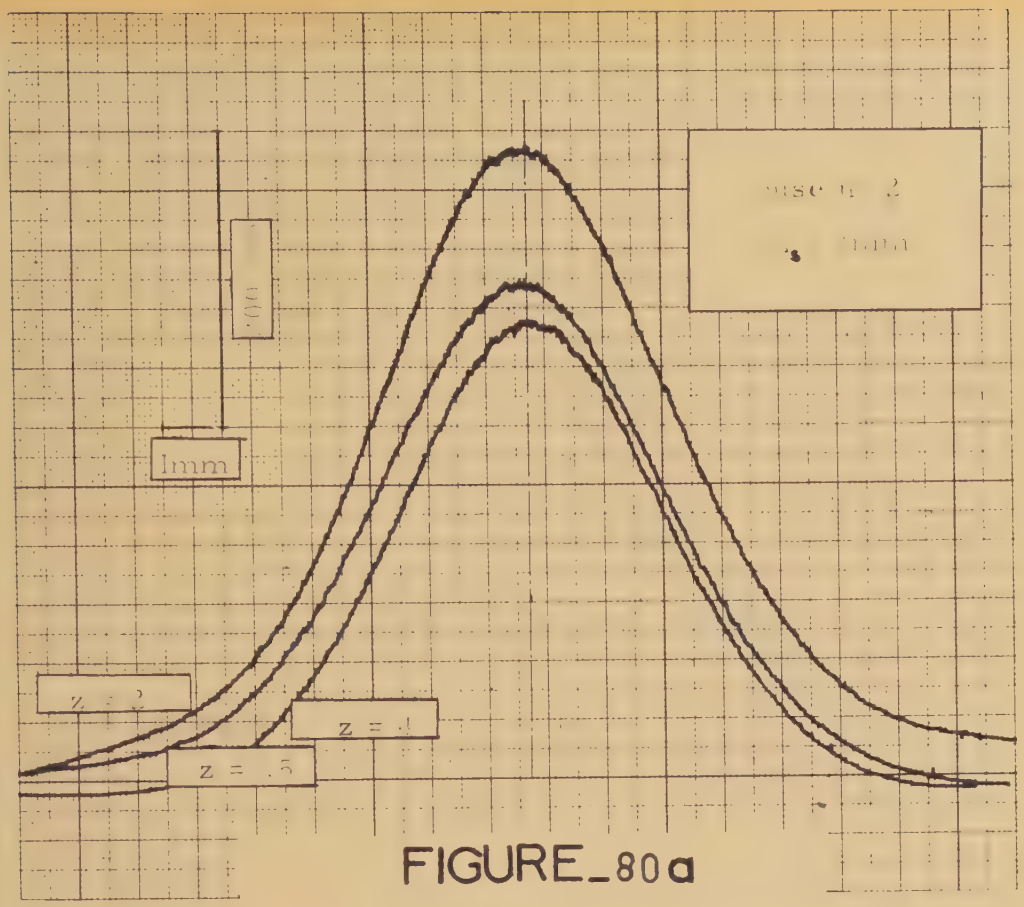


FIGURE_80a

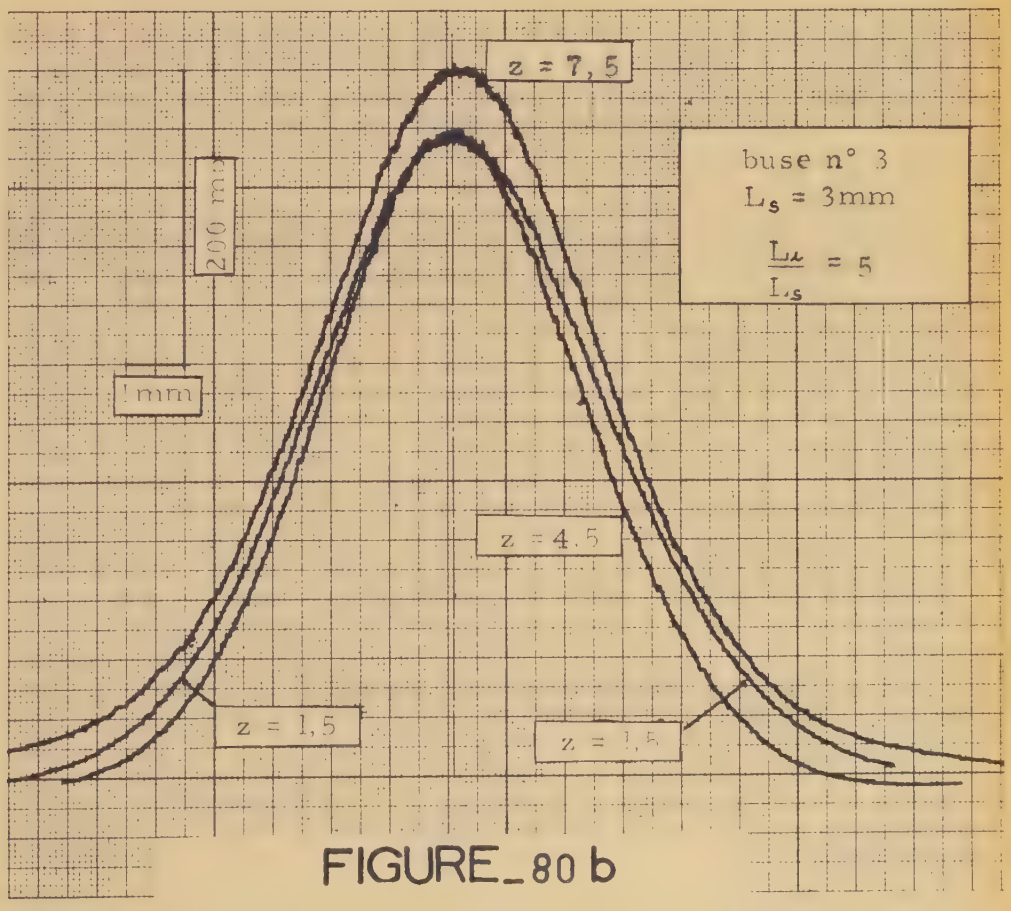


FIGURE_80b

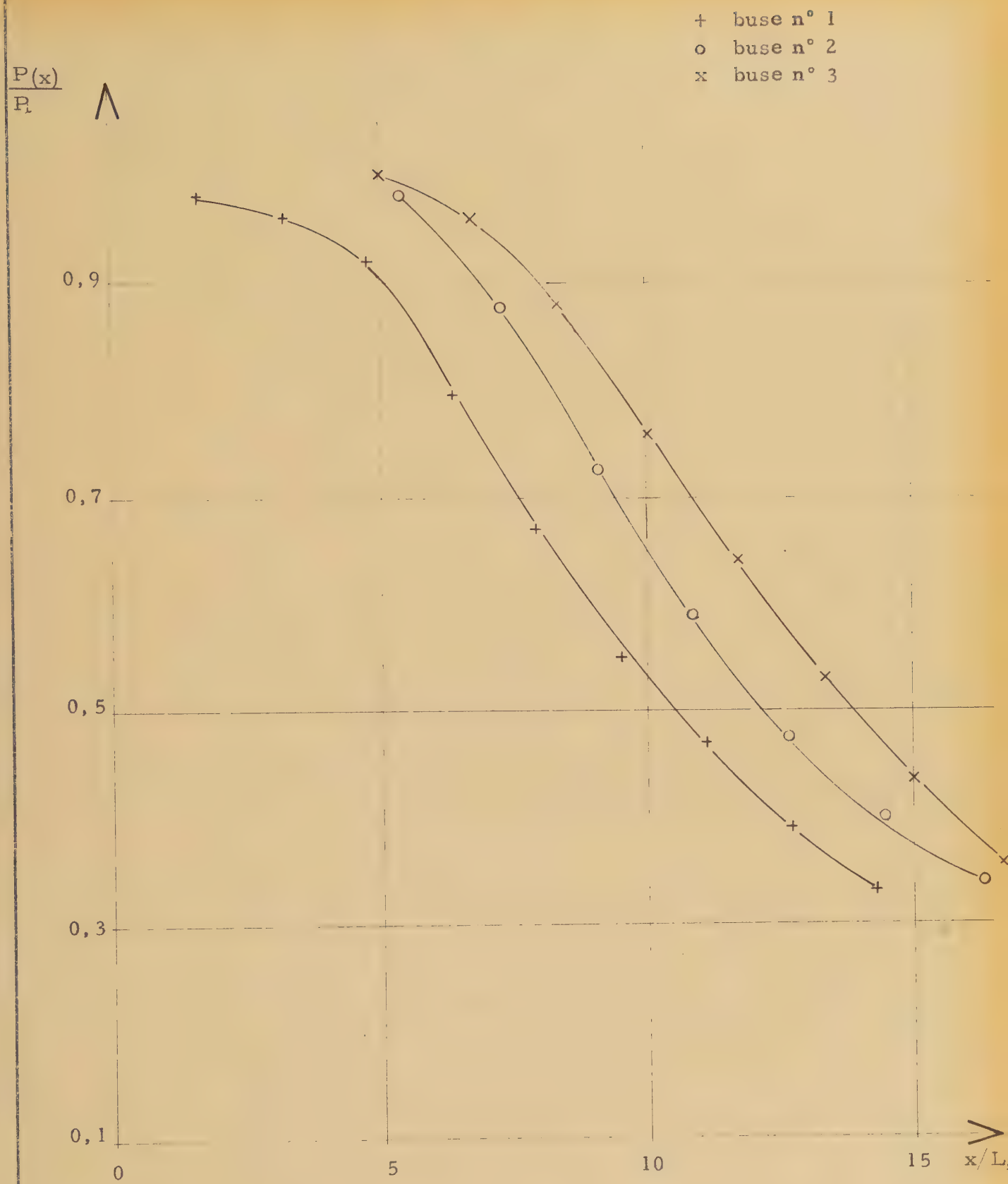


FIGURE_81

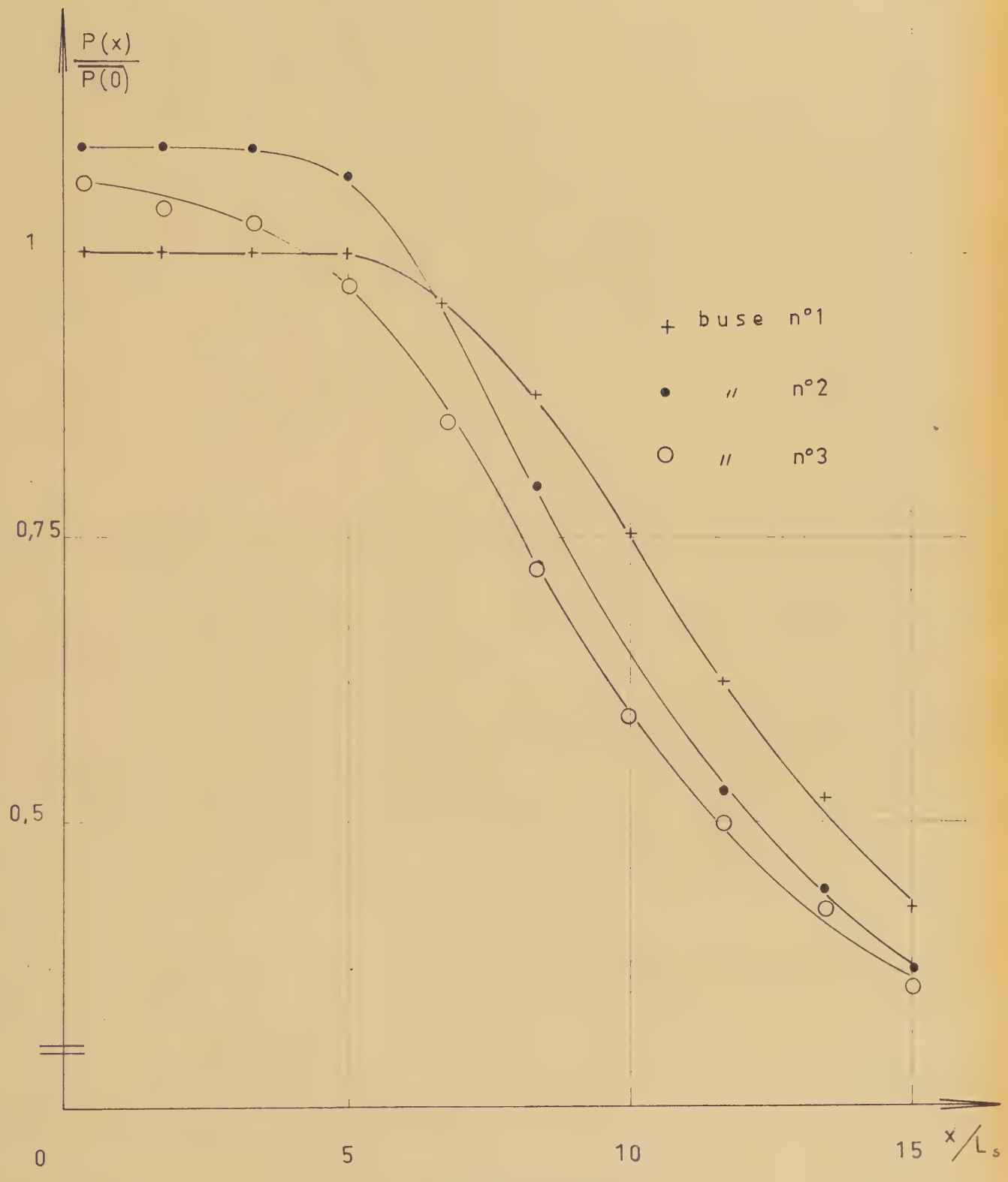


FIGURE_82

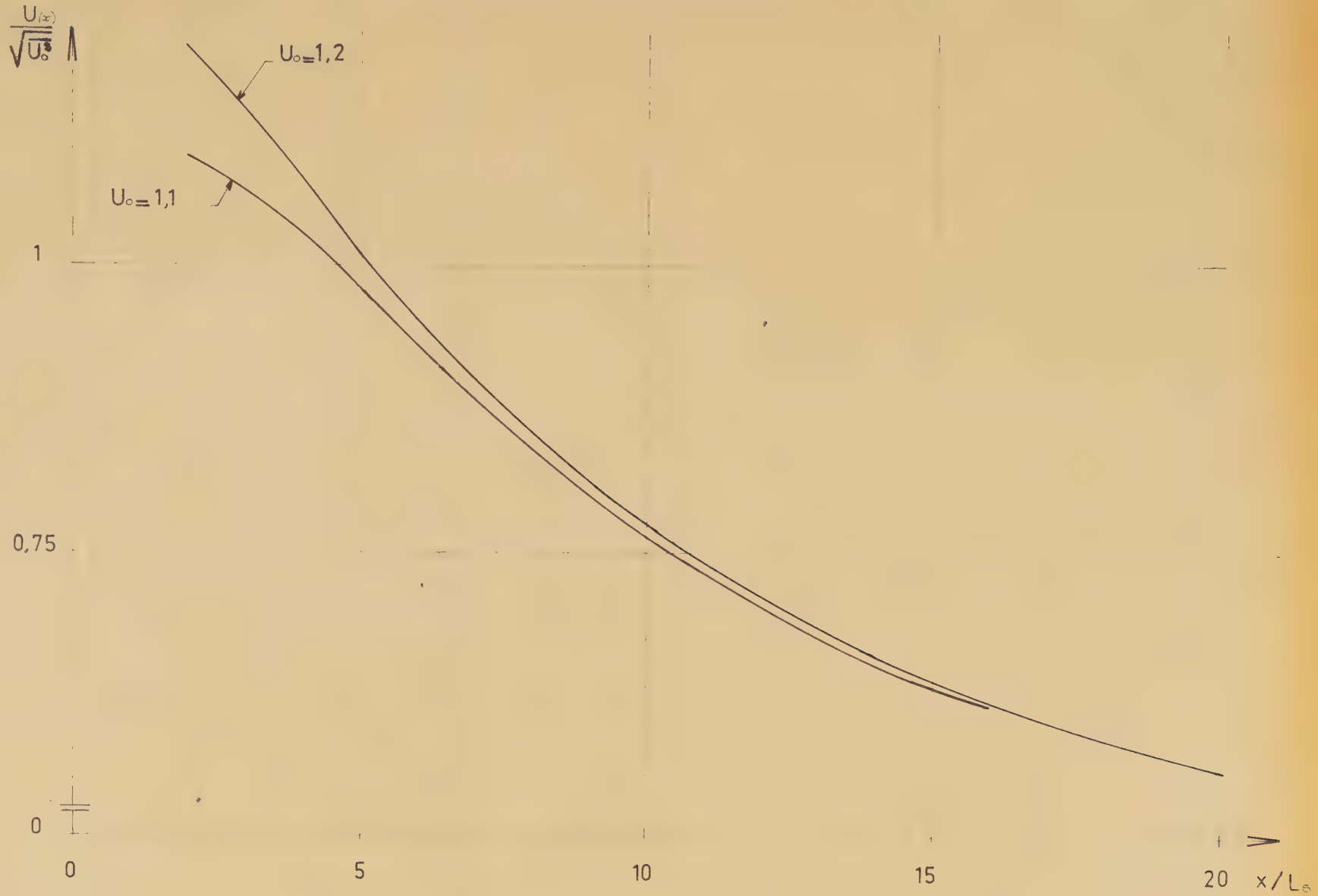


FIGURE _ 83

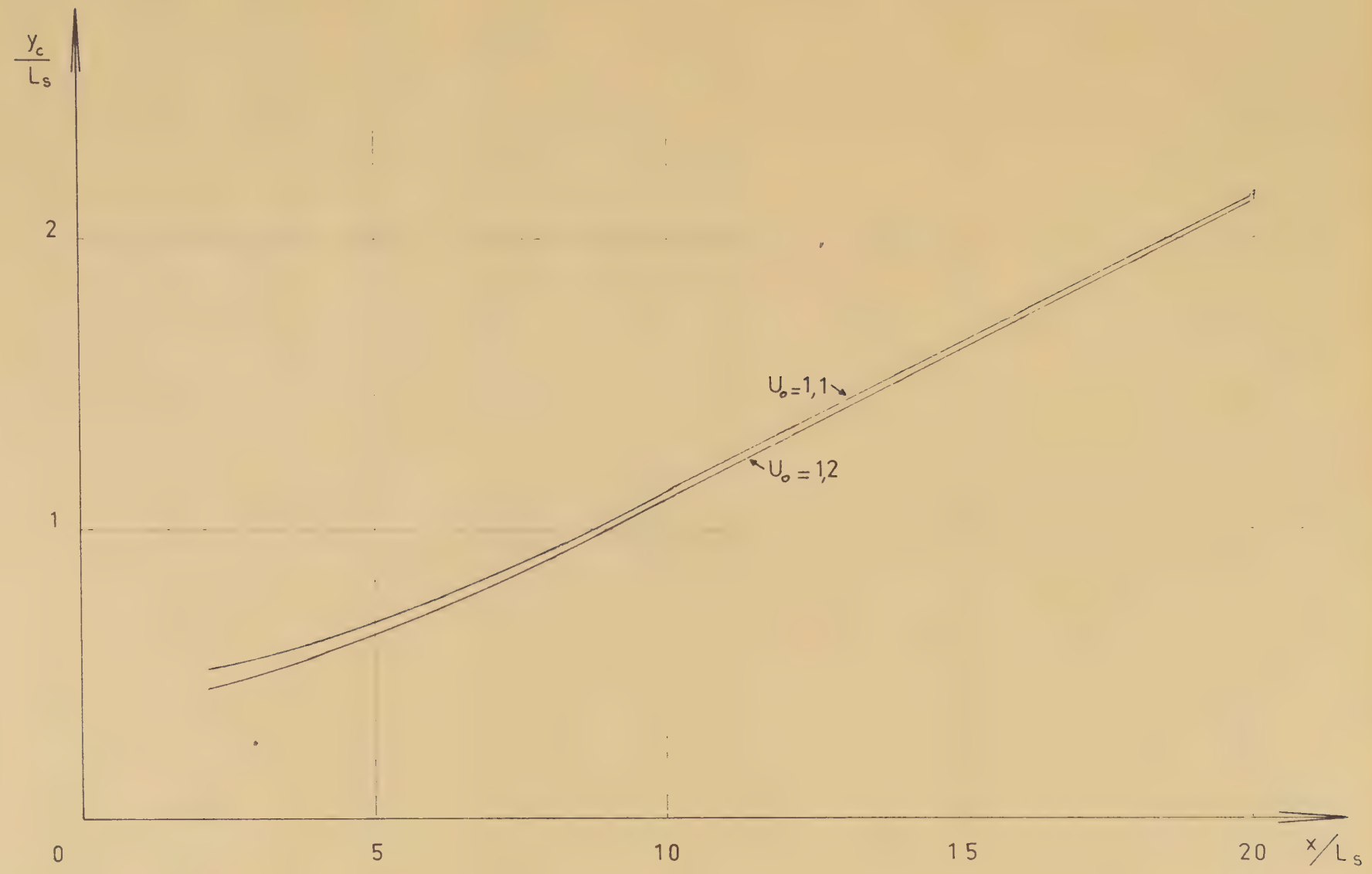
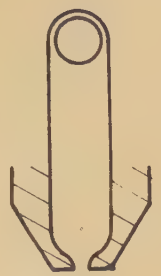


FIGURE_84

n° 1

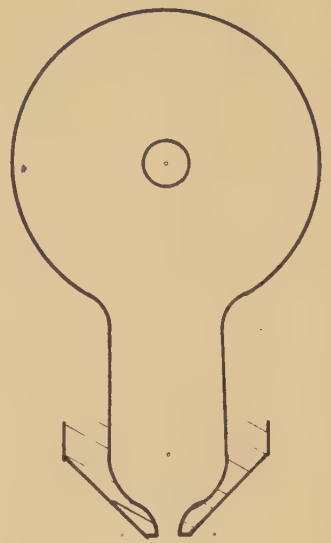


$\frac{L_i}{L_s} = 5$

$L_s = 3$ mm

$\phi_{al} = 10$ mm

n° 2



$\frac{L_i}{L_s} = 10$

$L_s = 3$ mm

$\phi_{al} = 10$ mm

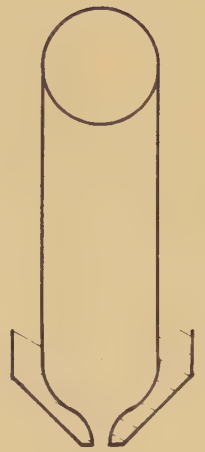
n° 3

$\frac{L_i}{L_s} = 10$

$L_s = 3$ mm

$\phi_{al} = 10$ mm

n° 4

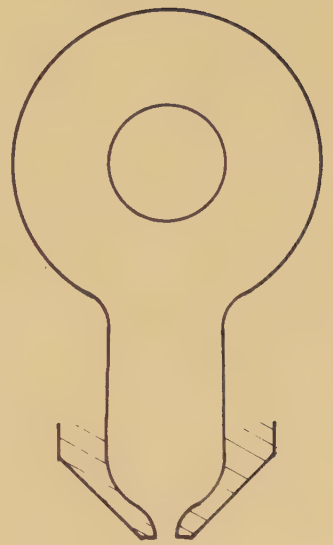


$\frac{L_i}{L_s} = 10$

$L_s = 3$ mm

$\phi_{al} = 10$ mm

n° 5



$\frac{L_i}{L_s} = 10$

$L_s = 3$ mm

$\phi_{al} = 30$ mm

FIGURE_85

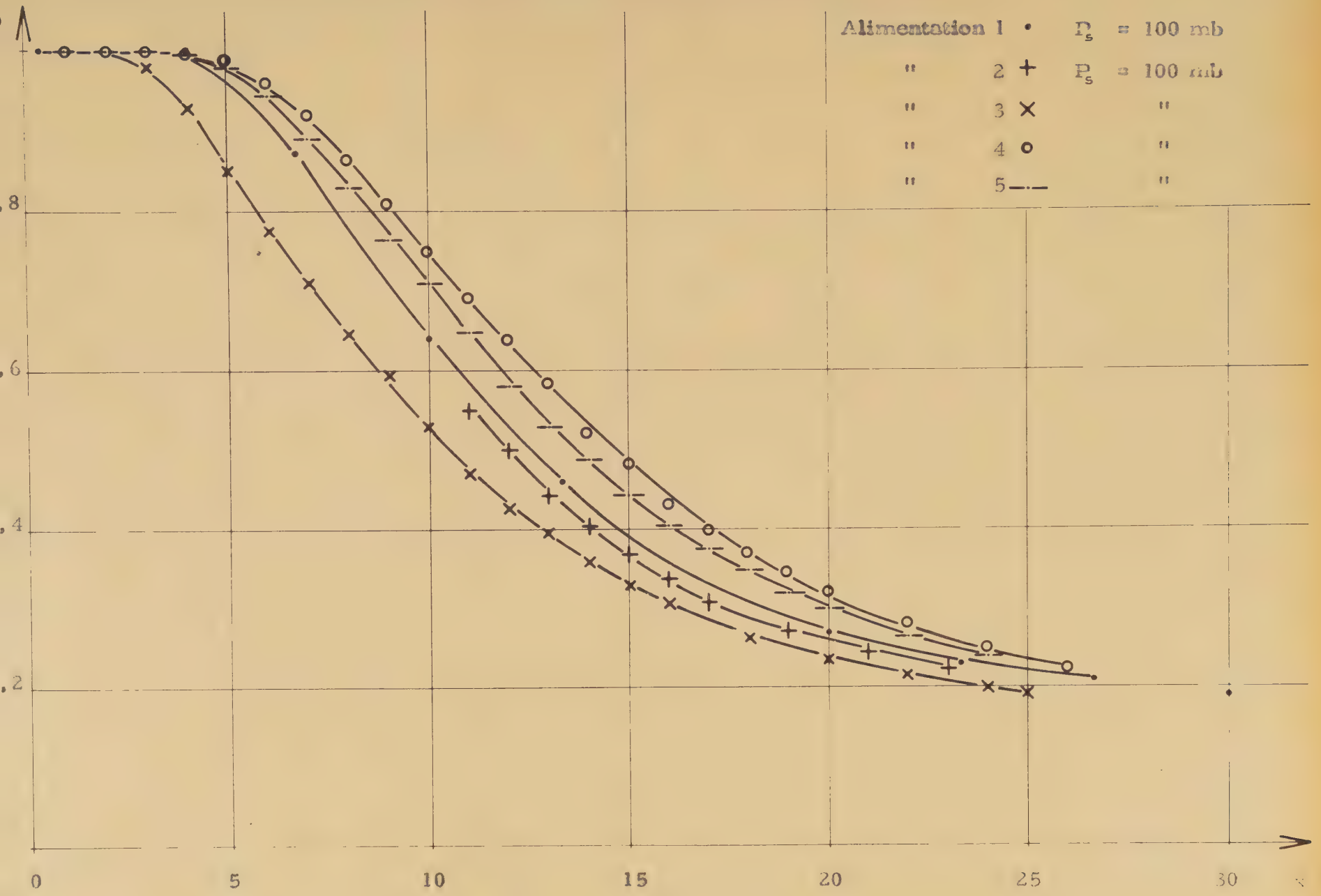


FIGURE_86

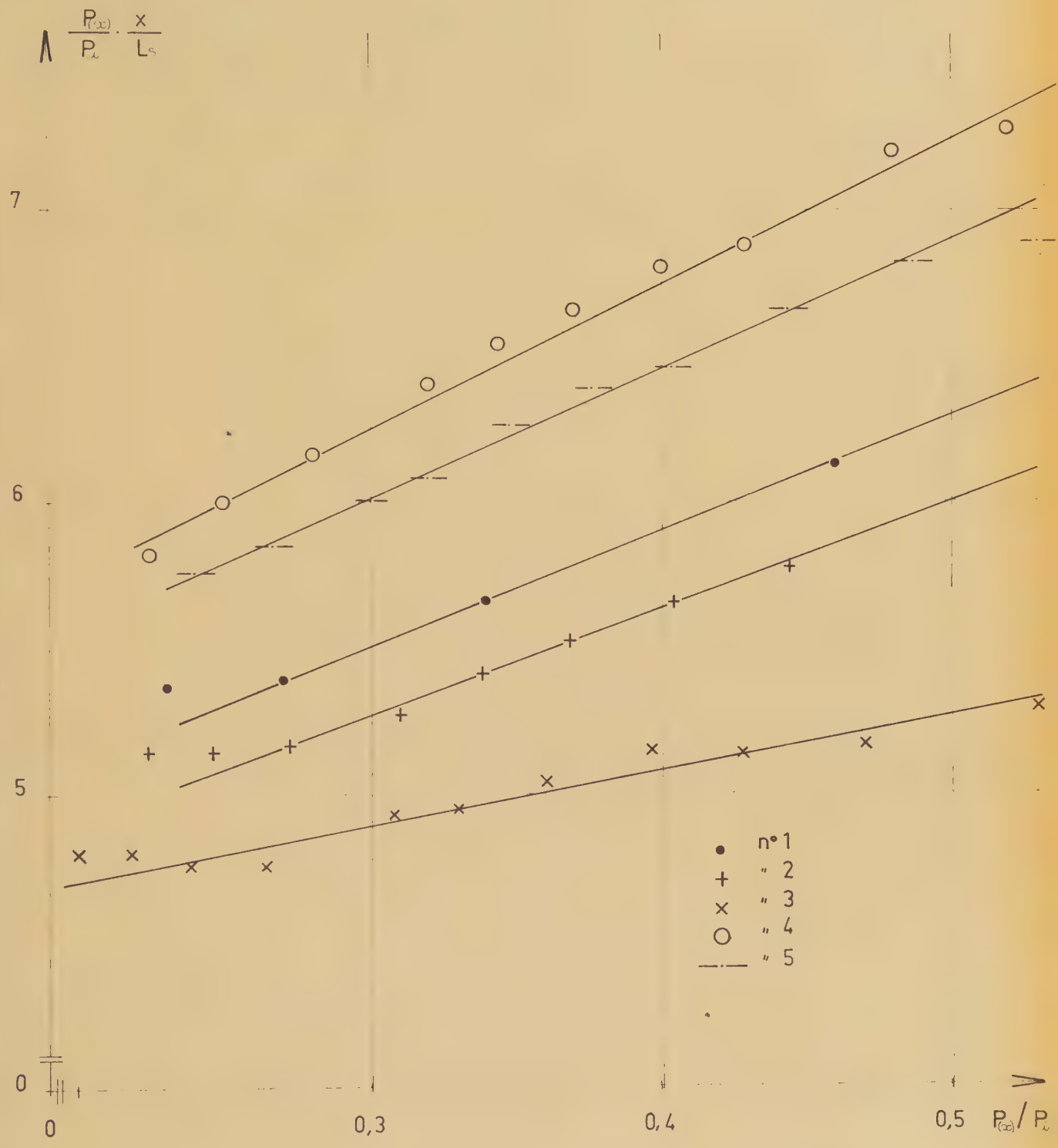


FIGURE_87

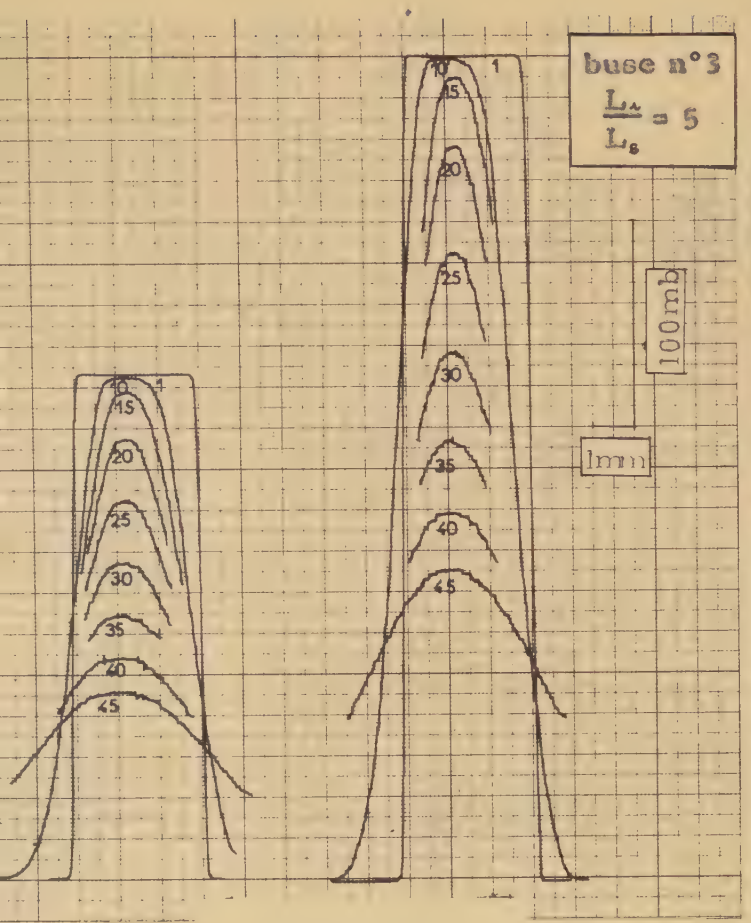


FIGURE_88a

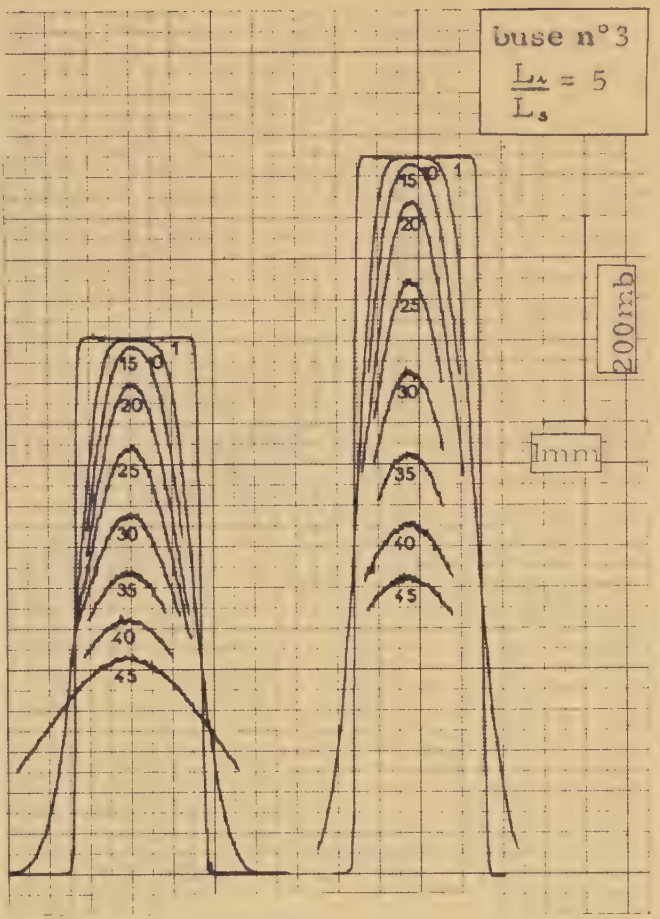


FIGURE_88b

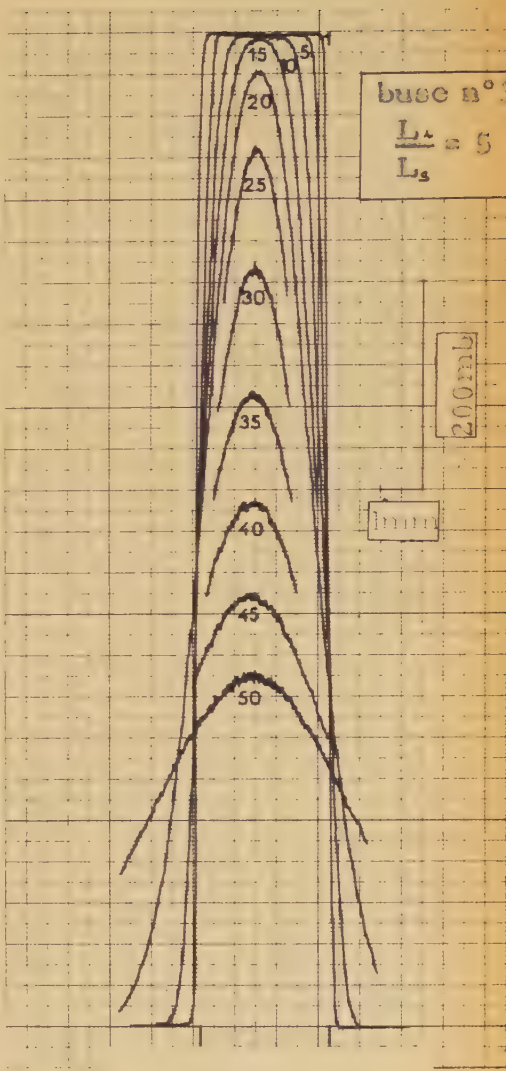


FIGURE_88c

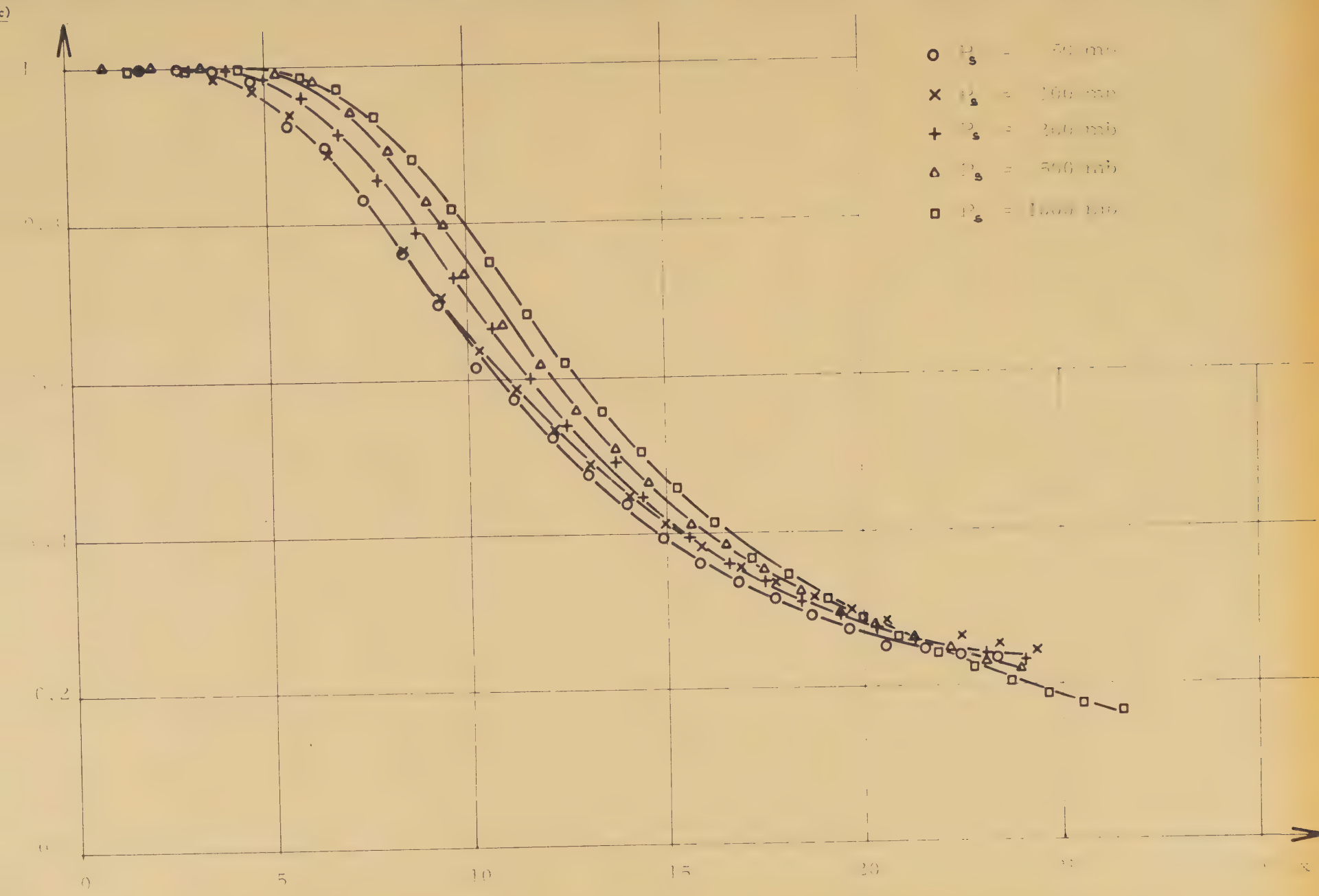


FIGURE_89

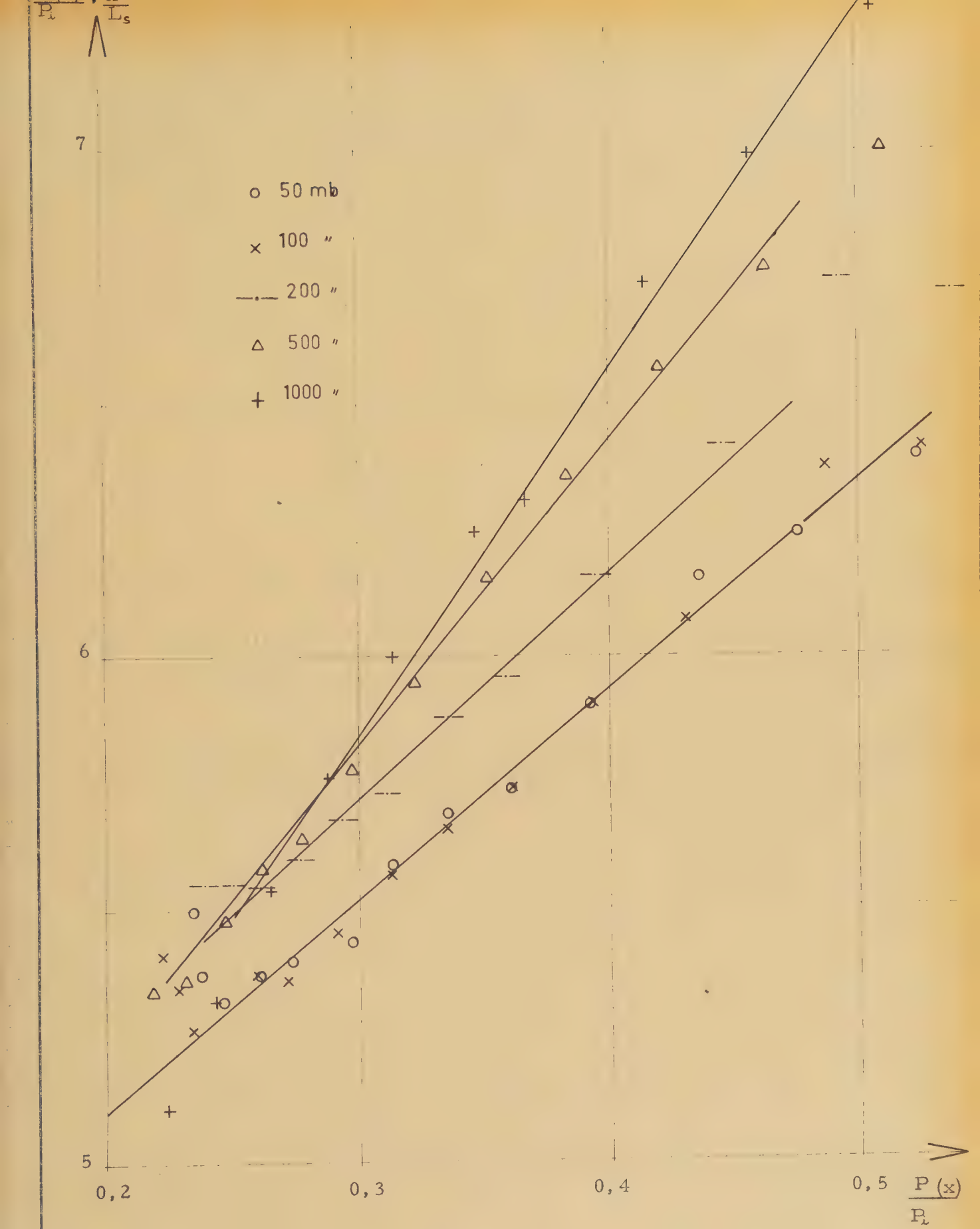


FIGURE_90

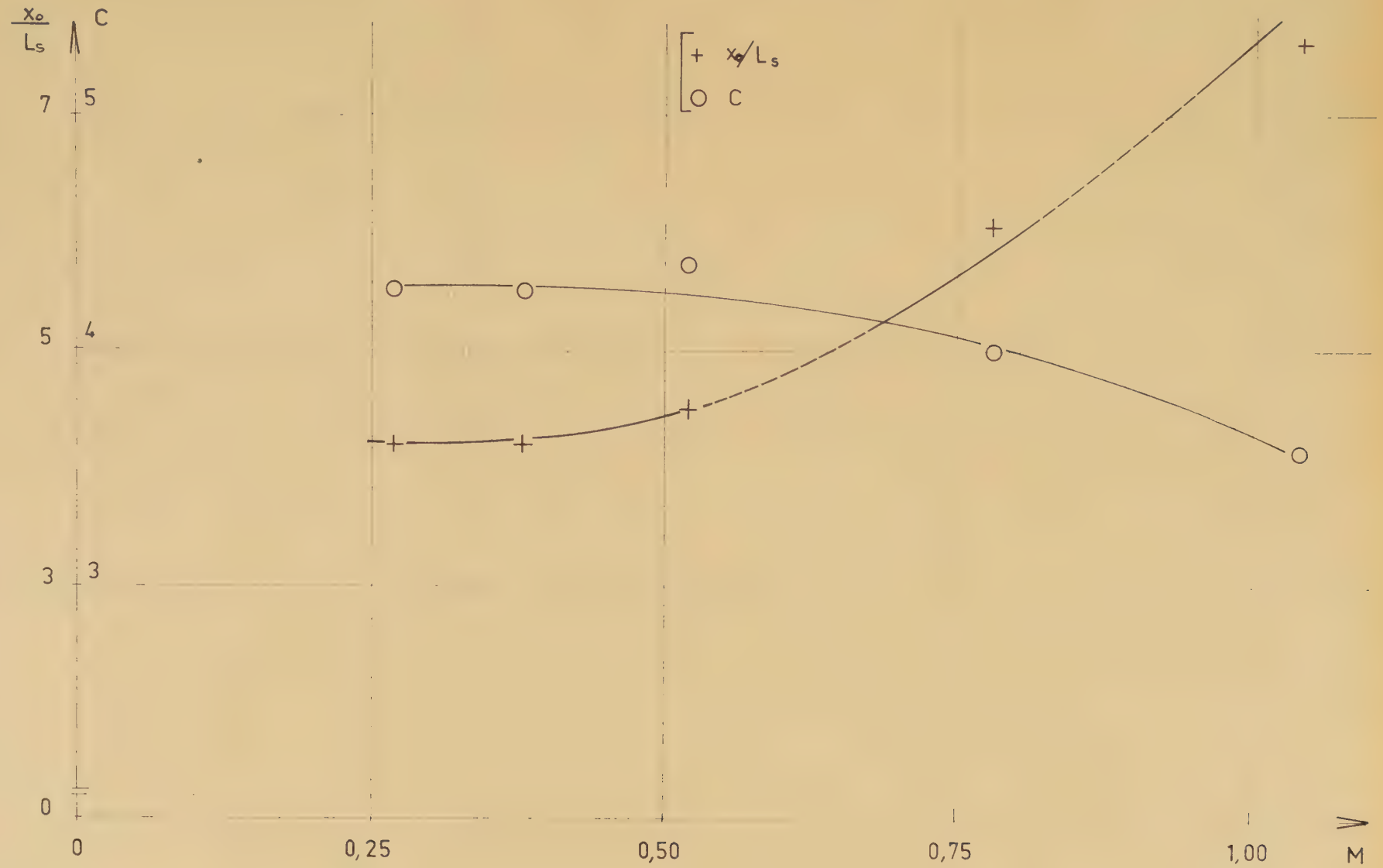


FIGURE_ 91

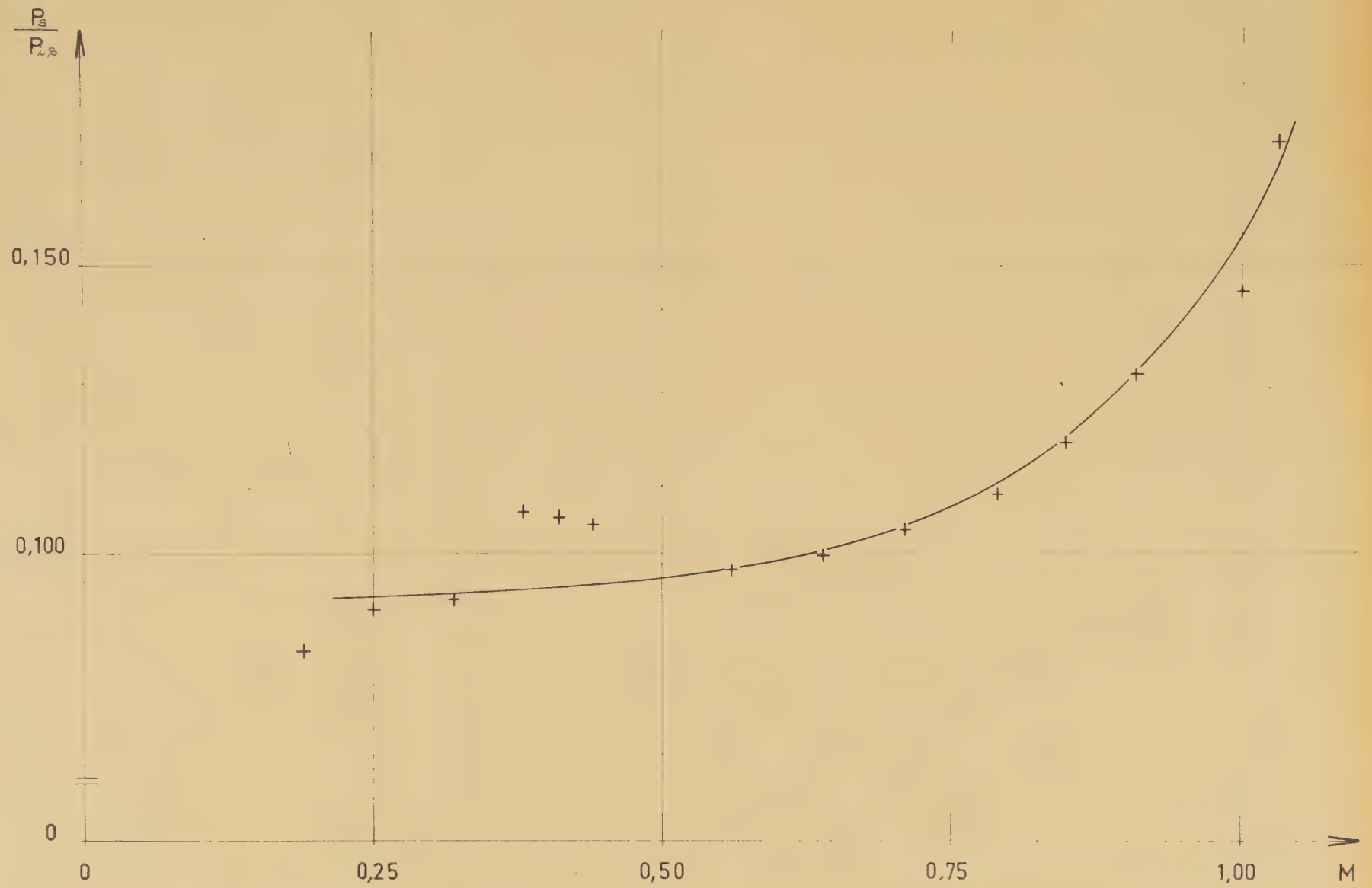


FIGURE_92

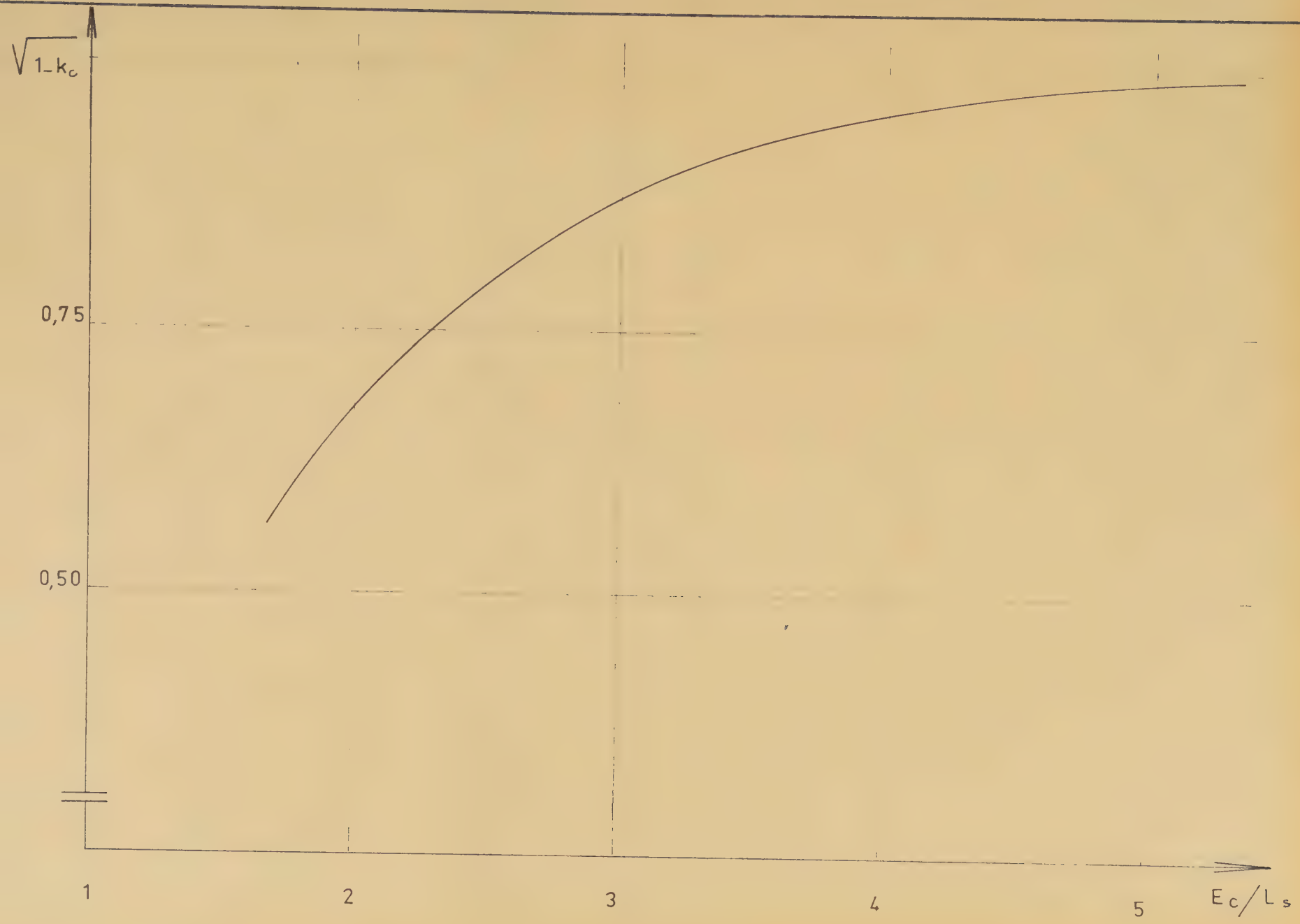


FIGURE_93

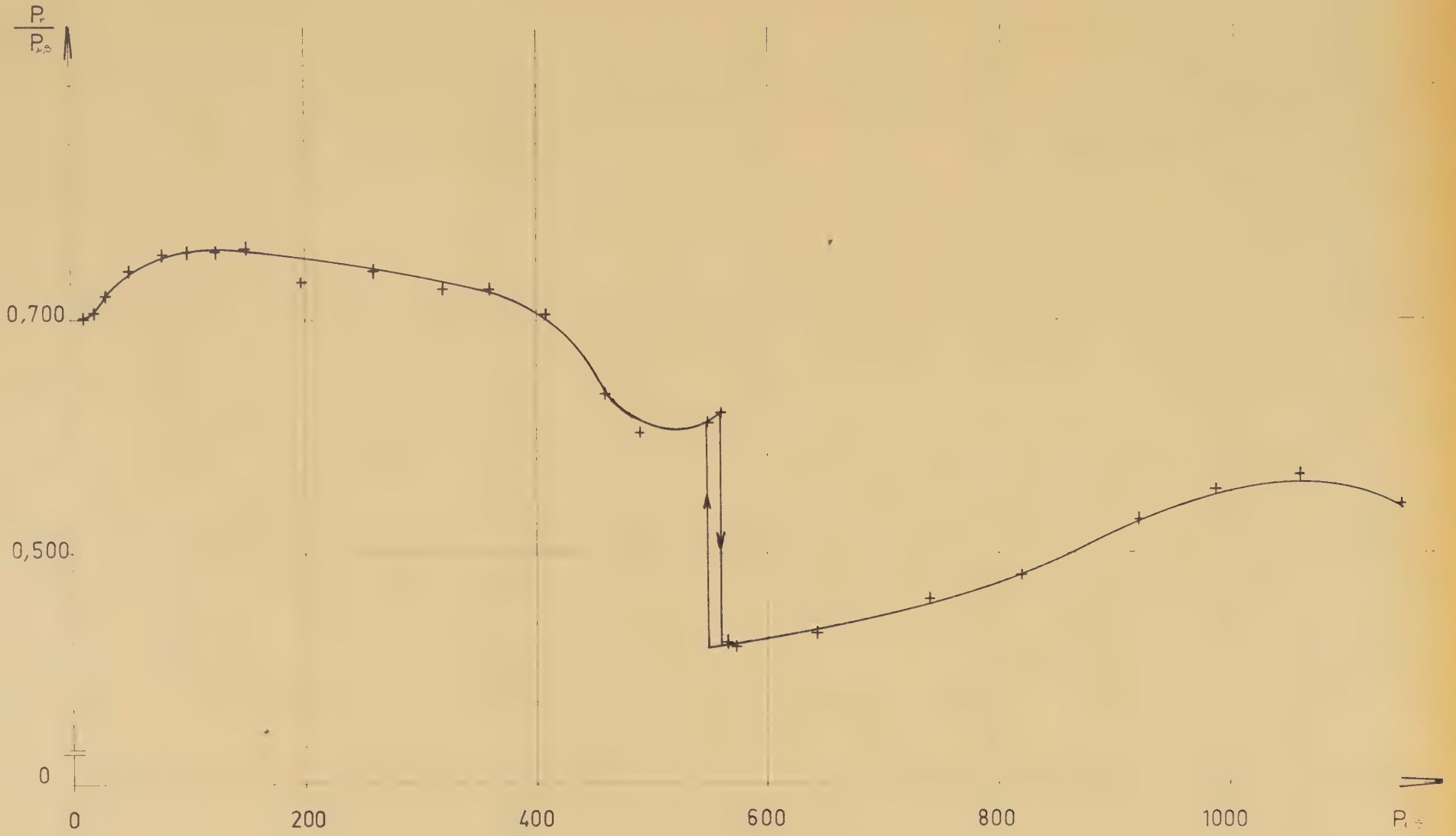


FIGURE_94

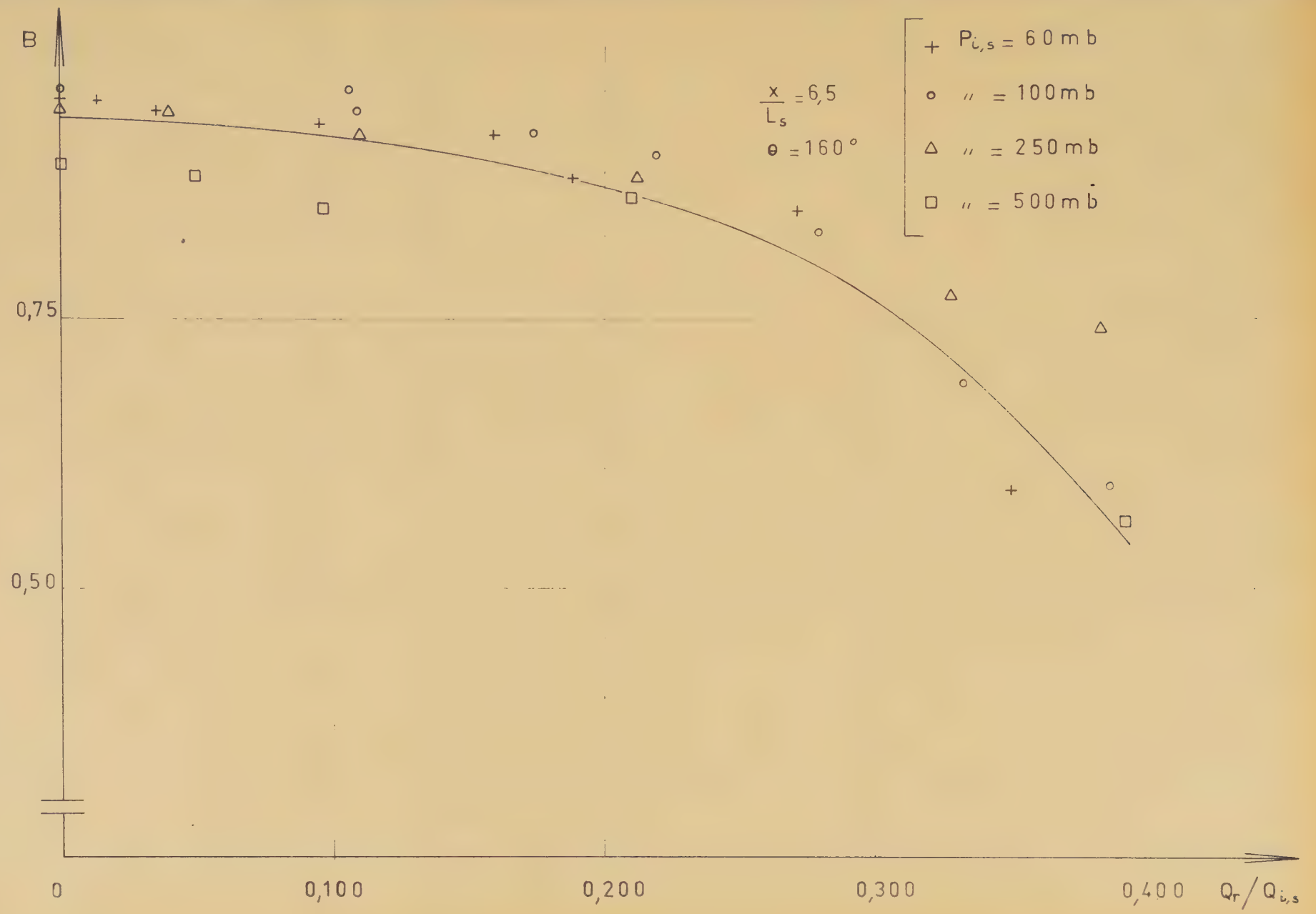

B
0,75
0,50
0
0,100
0,200
0,300
0,400
$Q_r / Q_{i,s}$
$\frac{x}{L_s} = 6,5$
$\theta = 160°$
+ $P_{i,s}$ = 60 mb
o " = 100 mb
△ " = 250 mb
□ " = 500 mb

FIGURE_95 a

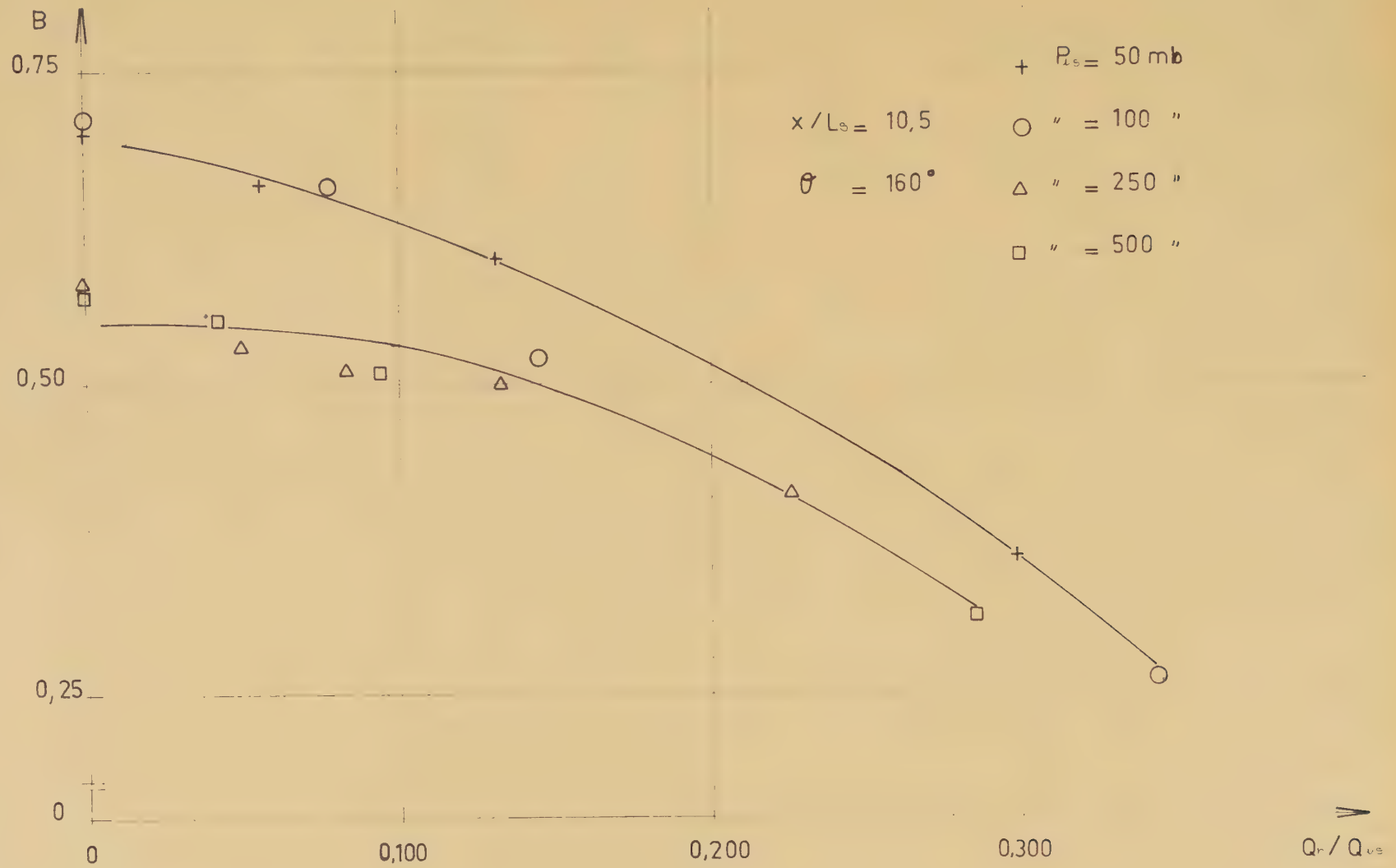

B
0,75
0,50
0,25
0
0
0,100
0,200
0,300
Q_r / Q_{vs}
$x / L_s = 10,5$
$\theta = 160°$
+ P_{is} = 50 mb
○ " = 100 "
△ " = 250 "
□ " = 500 "

FIGURE_95 b

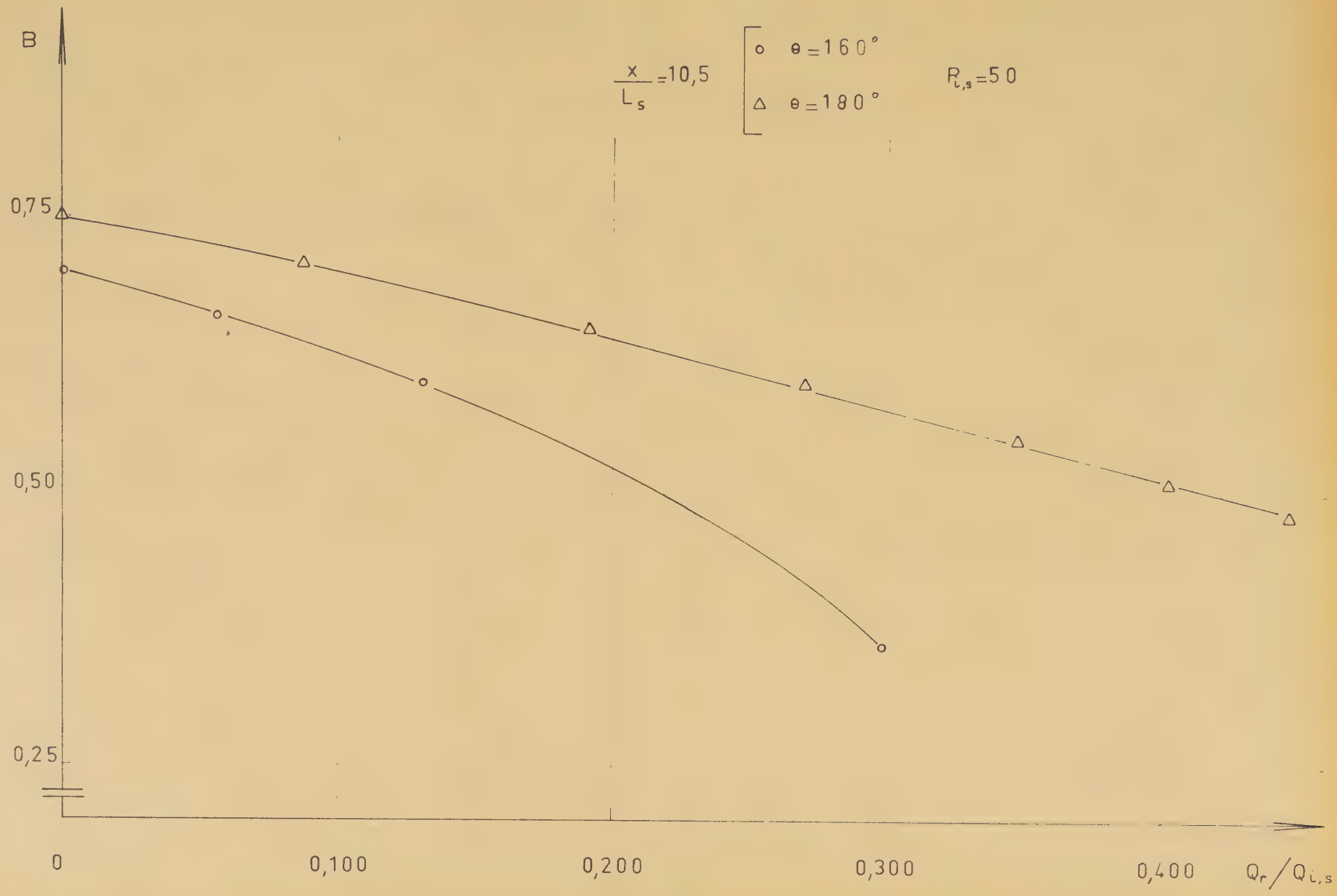

B
$\frac{x}{L_s}$ =10,5
o θ=160°
Δ θ=180°
$R_{i,s}$=50
0,75
0,50
0,25
0
0,100
0,200
0,300
0,400
$Q_r/Q_{i,s}$

FIGURE_96

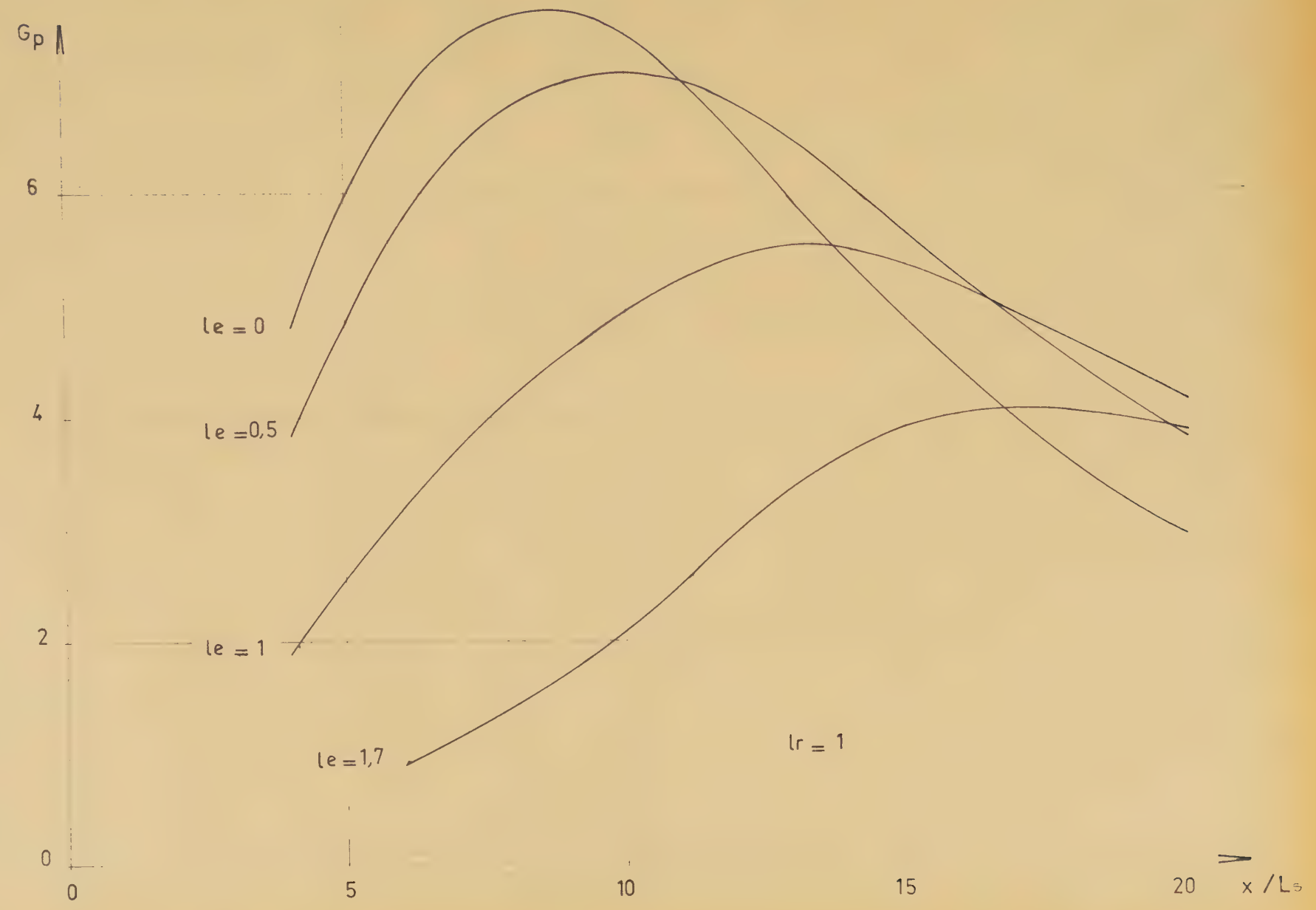


FIGURE_97

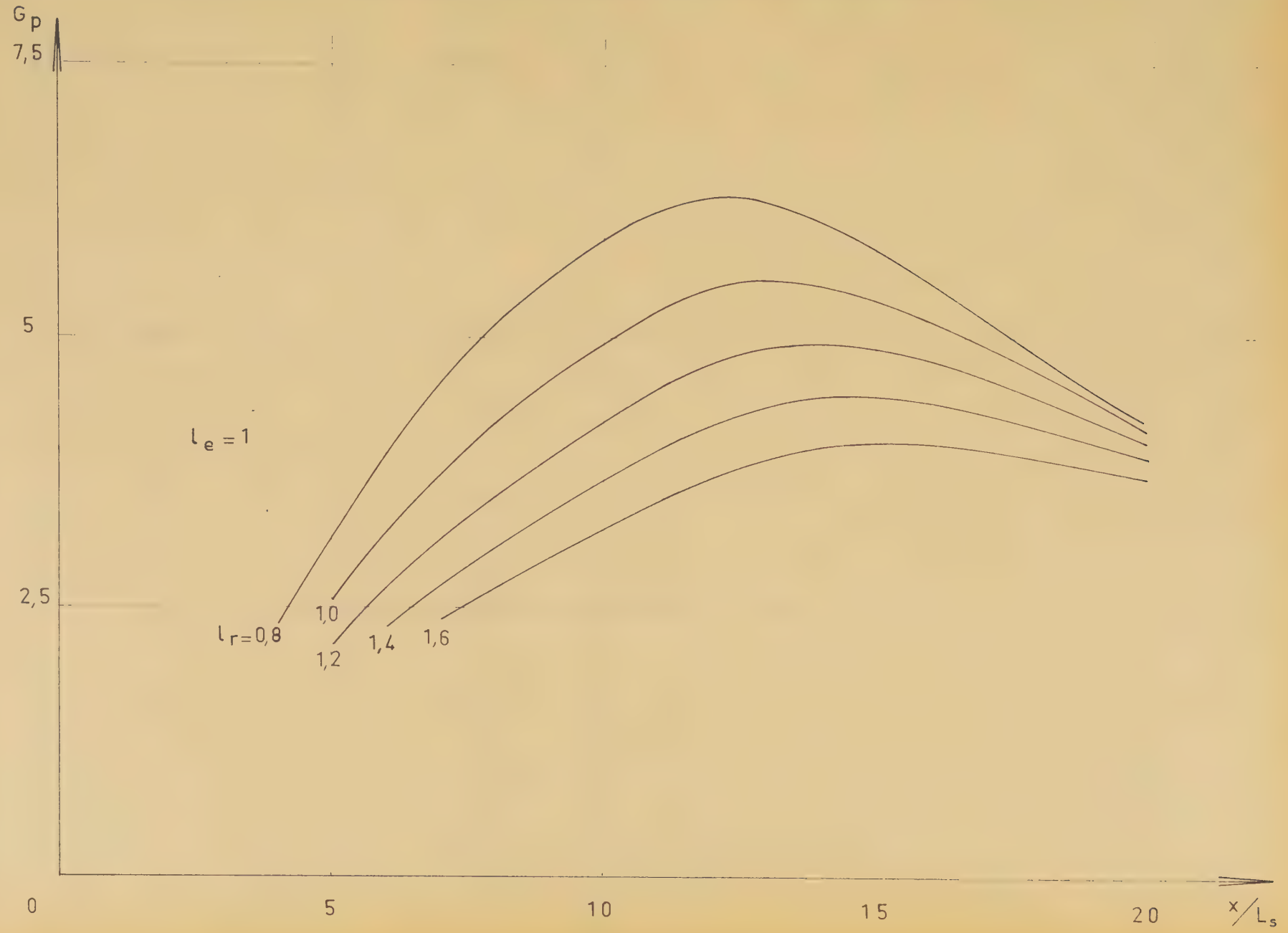


FIGURE_98a

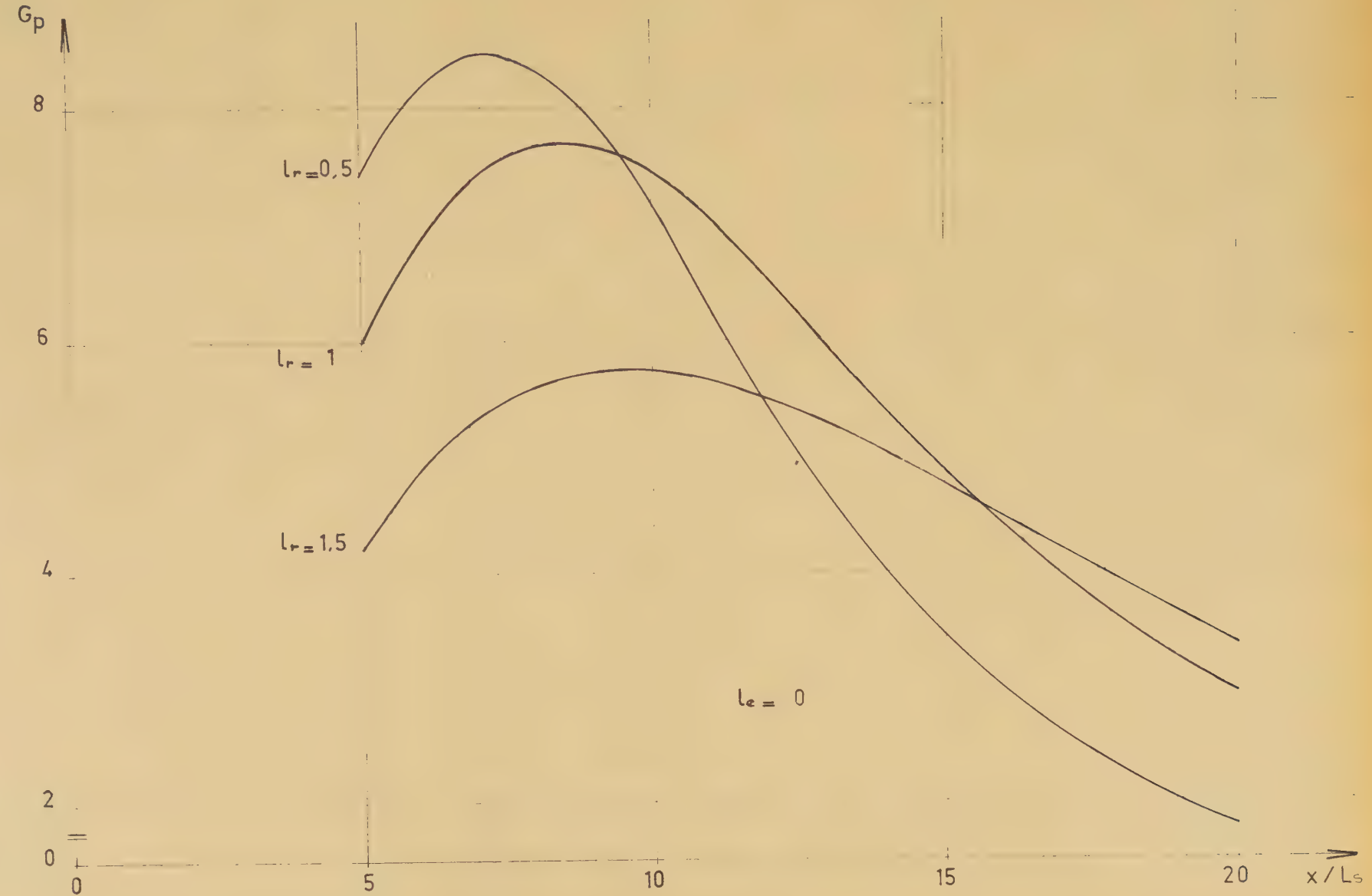


FIGURE _ 98 b

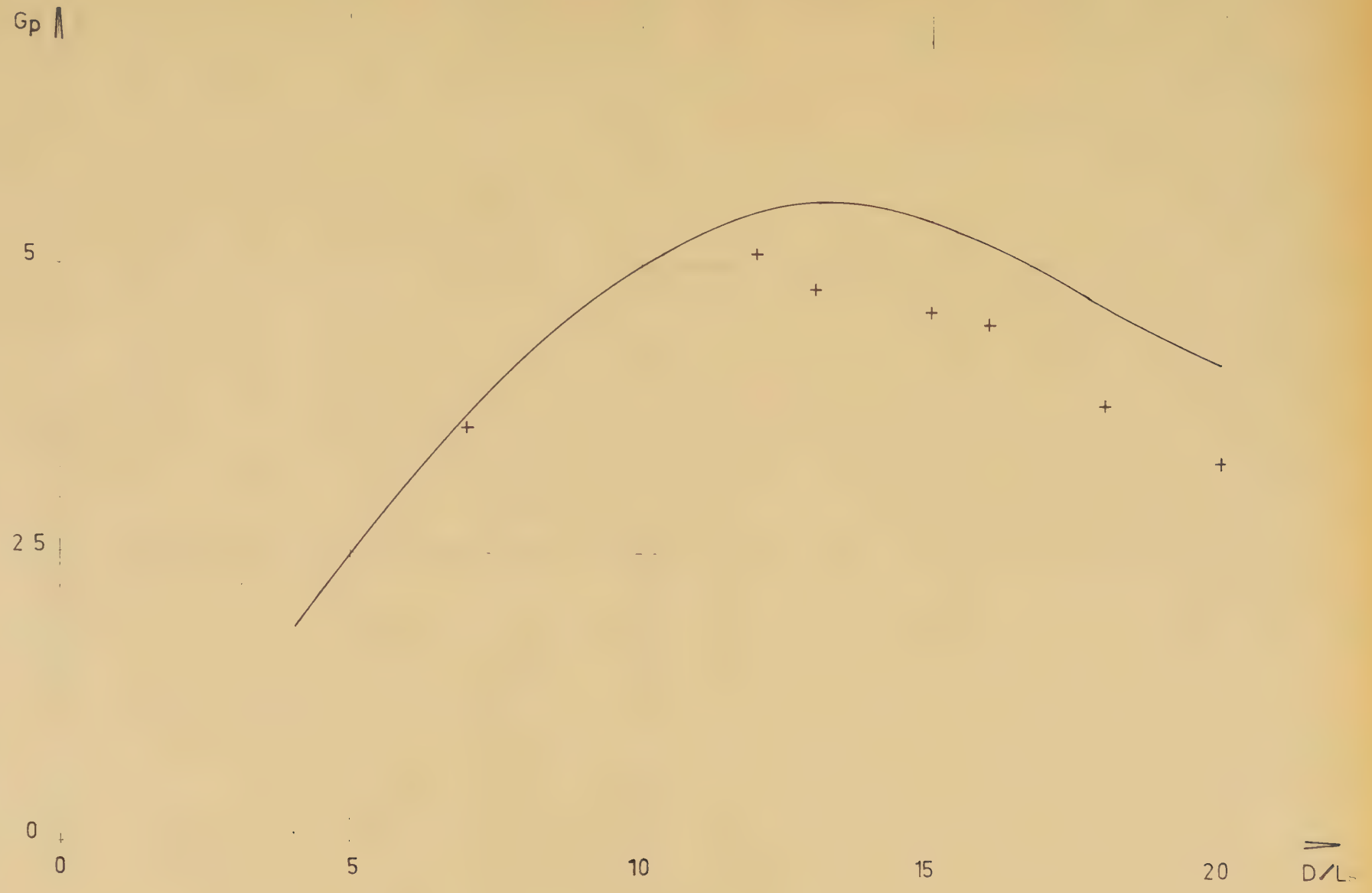
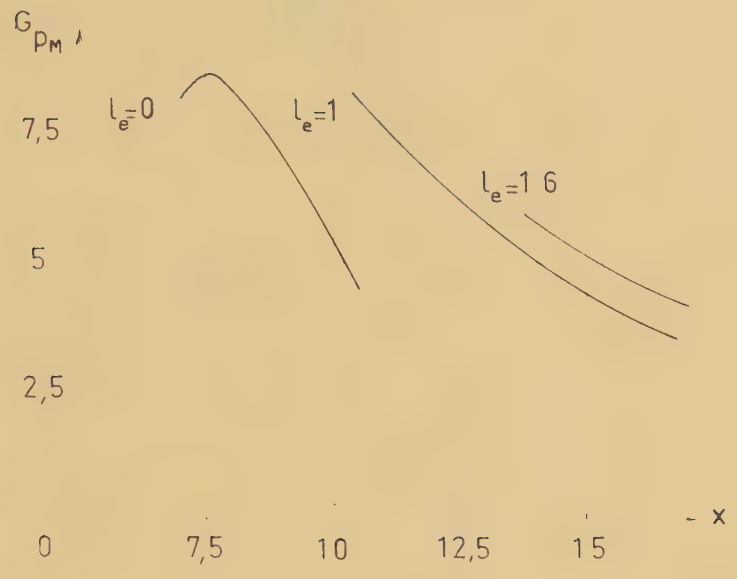


FIGURE _ 99


G_{pM}
7,5
5
2,5
l_e=0
l_e=1
l_e=1 6
- x
0
7,5
10
12,5
15

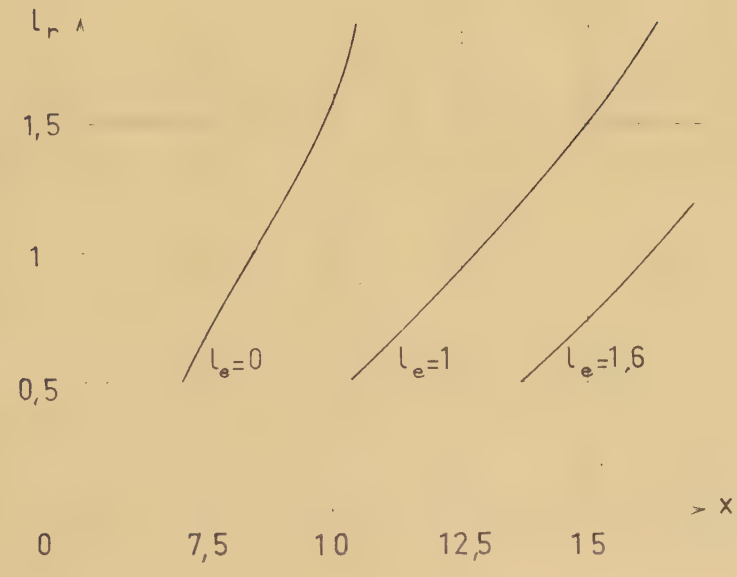

l_r
1,5
1
0,5
l_e=0
l_e=1
l_e=1,6
> x
0
7,5
10
12,5
15

FIGURE_100

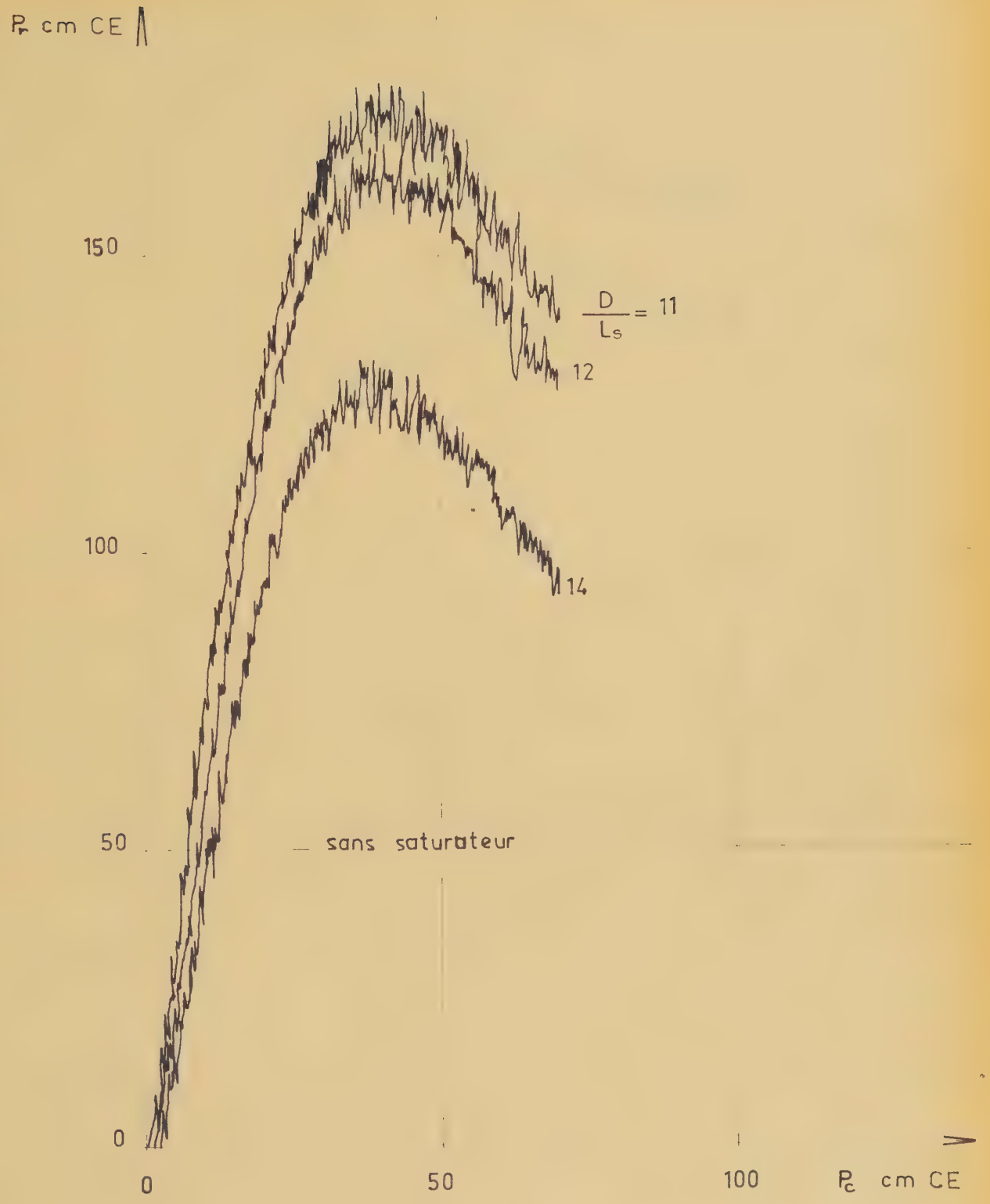

Pr cm CE
150
100
50
0
0
50
100
Pc cm CE
D/Ls = 11
12
14
sans saturateur

FIGURE_101

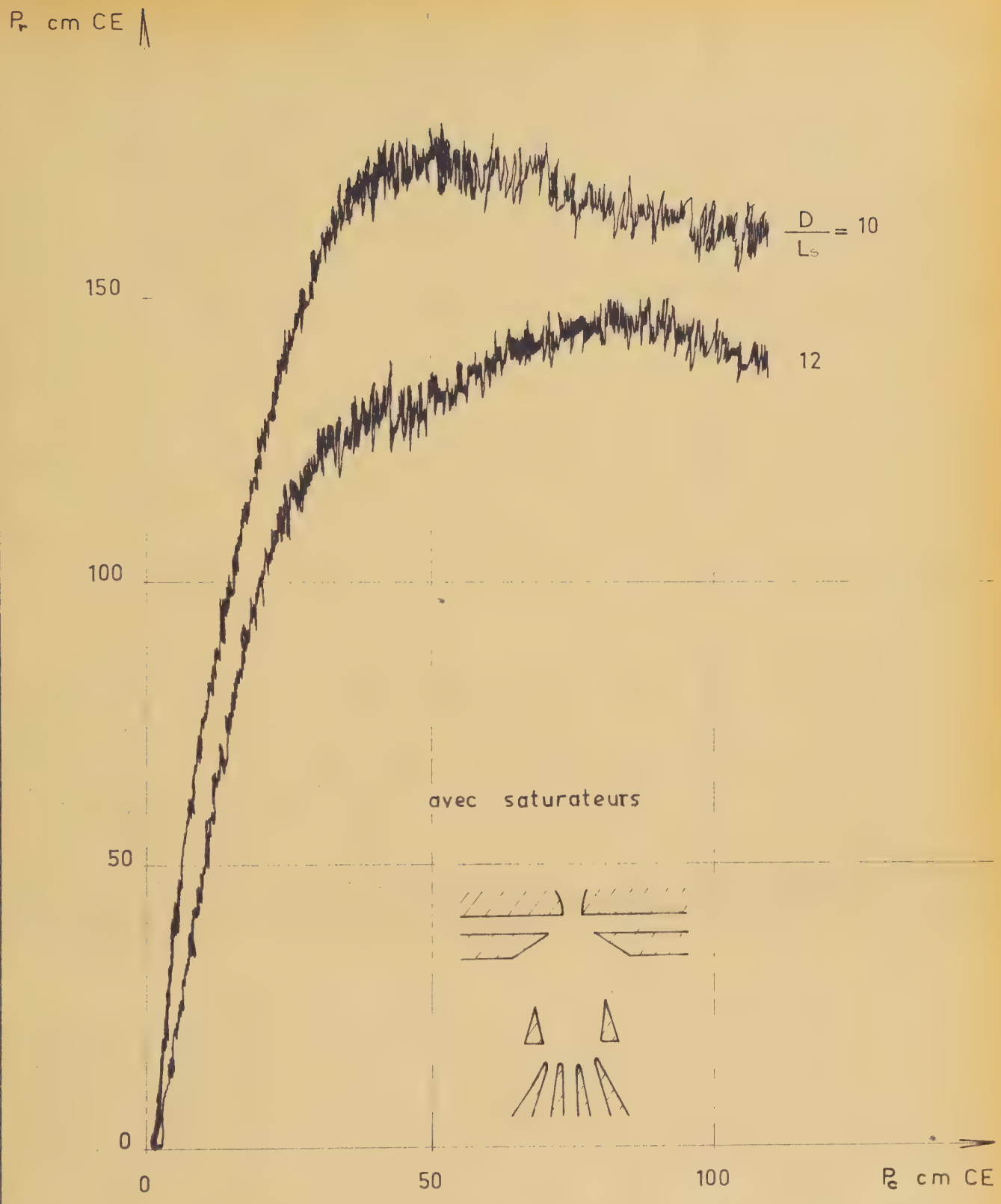
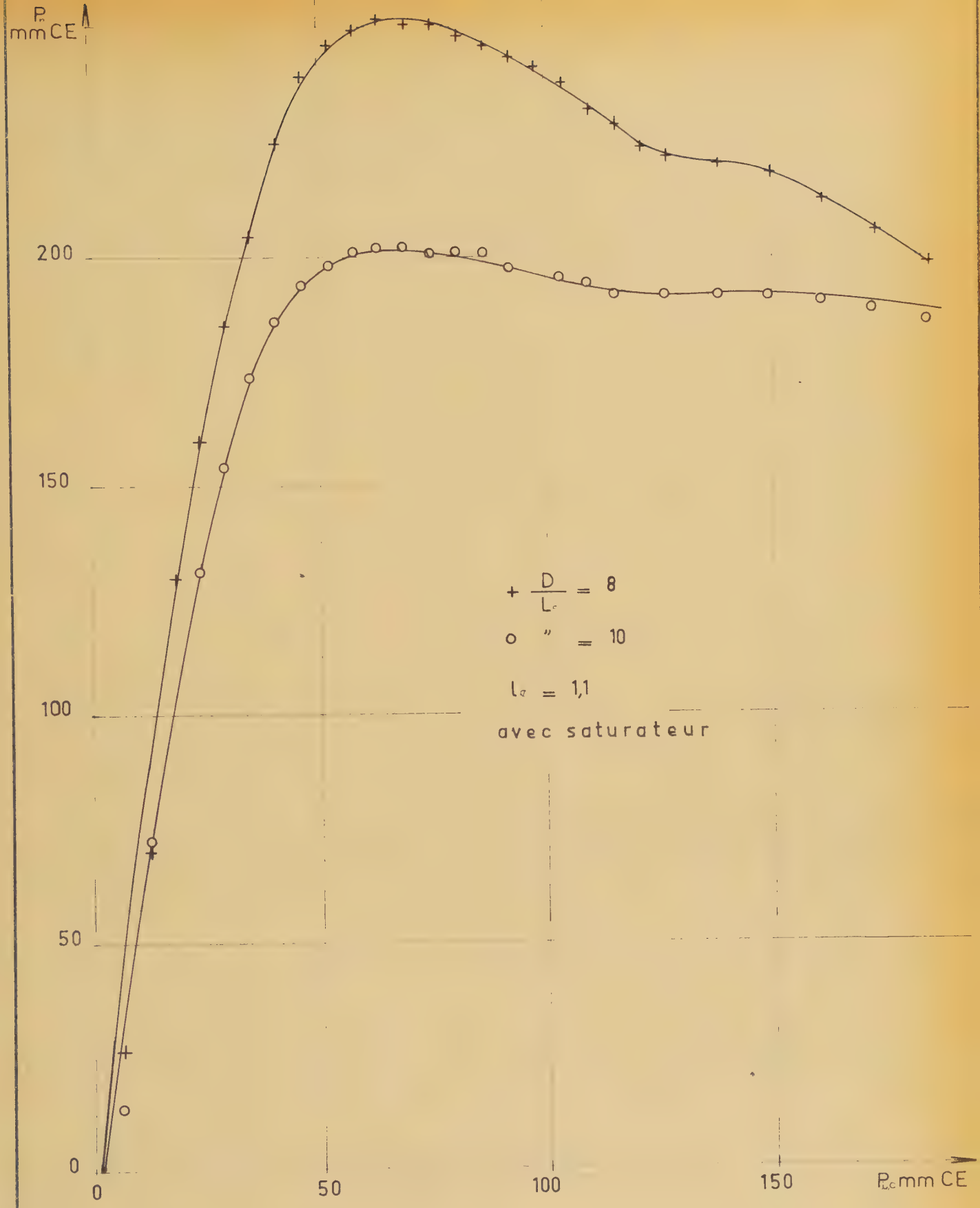


FIGURE _ 102



P mm CE
200
150
100
50
0
0
50
100
150
P mm CE
+ D/L = 8
o " = 10
l = 1,1
avec saturateur

FIGURE_103

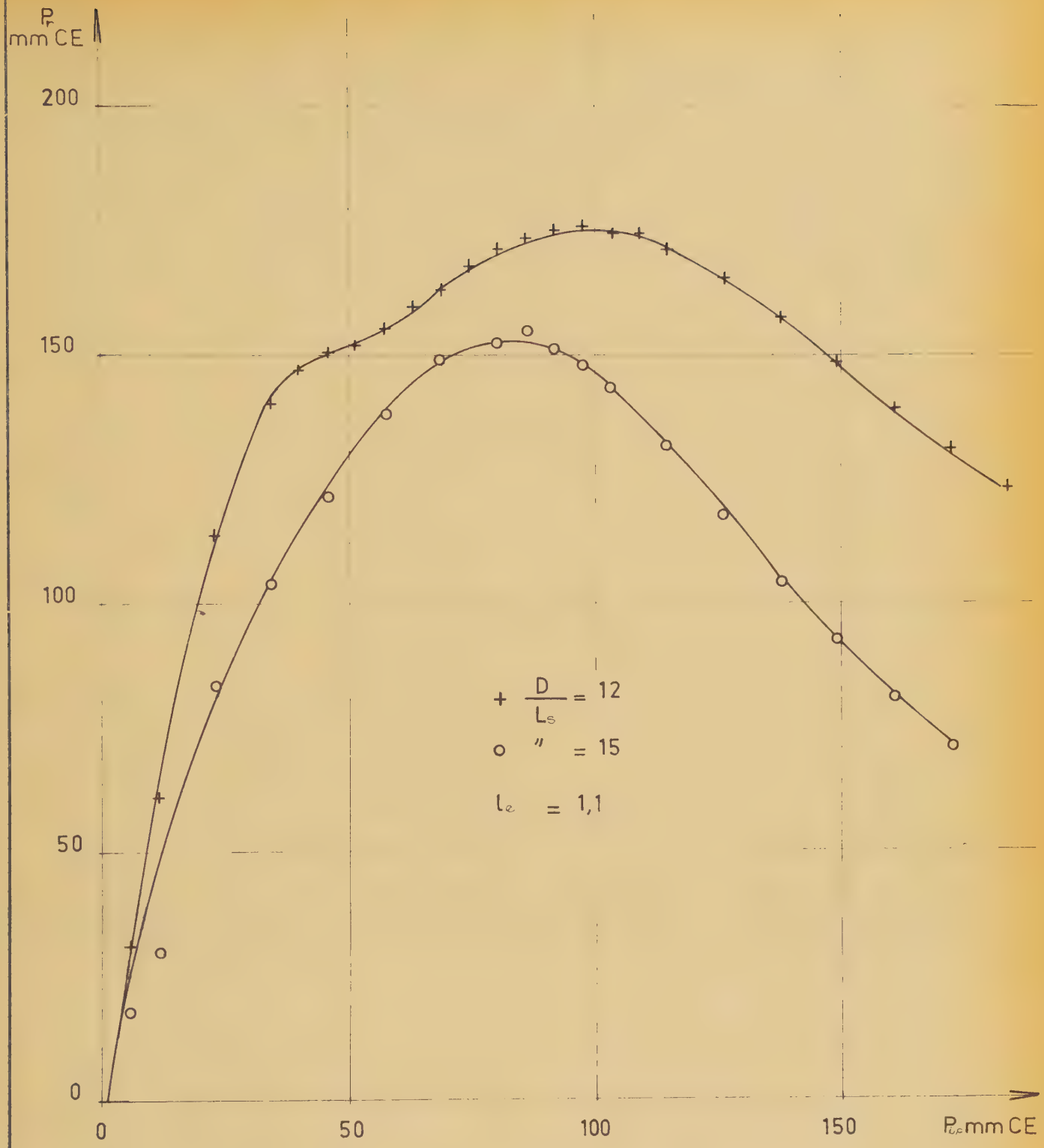


FIGURE_ 104

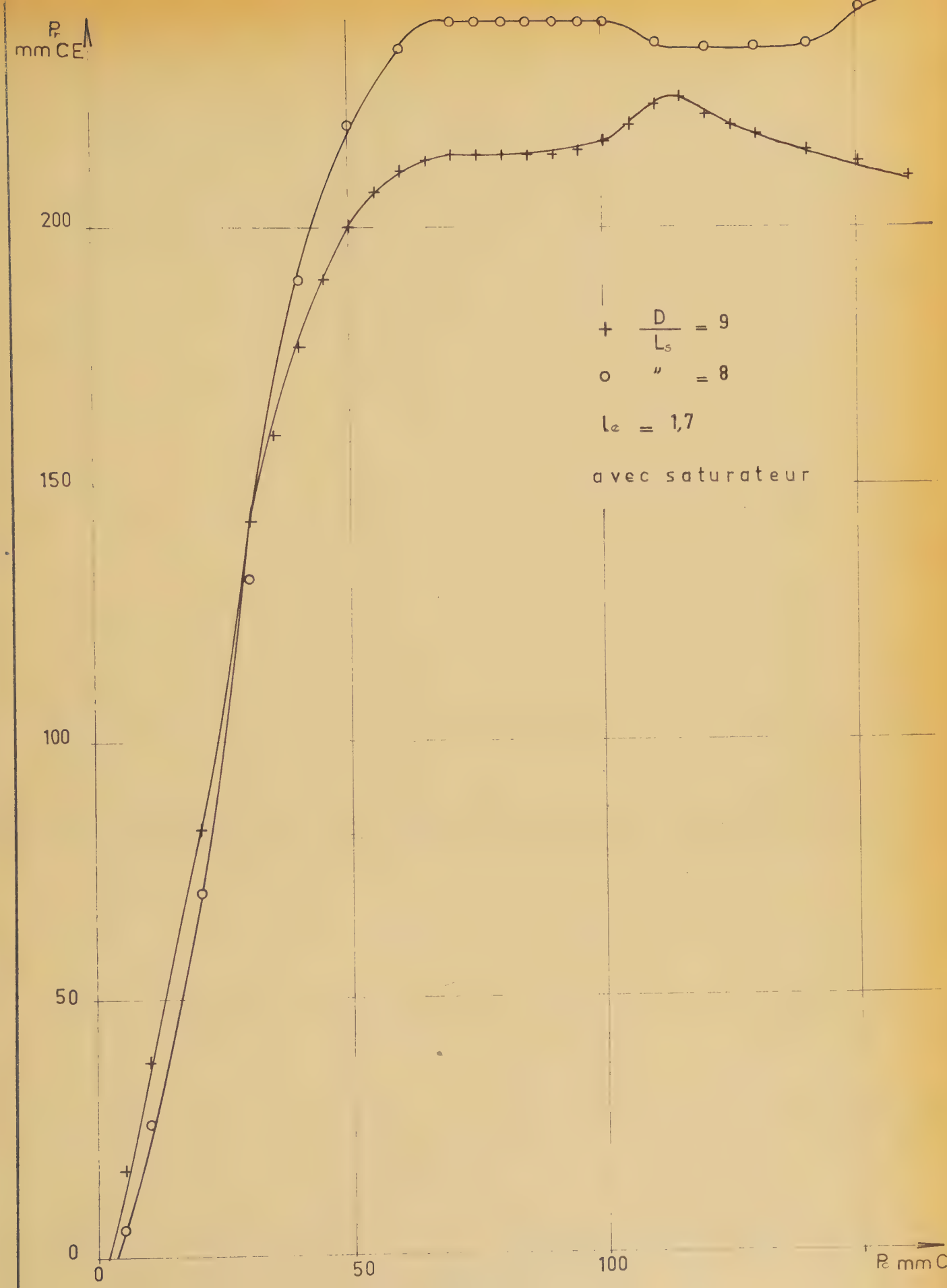

Pr
mm CE
200
150
100
50
0
0
50
100
Pe mm CE
+ D/Ls = 9
o " = 8
le = 1,7
avec saturateur

FIGURE 4.2.5

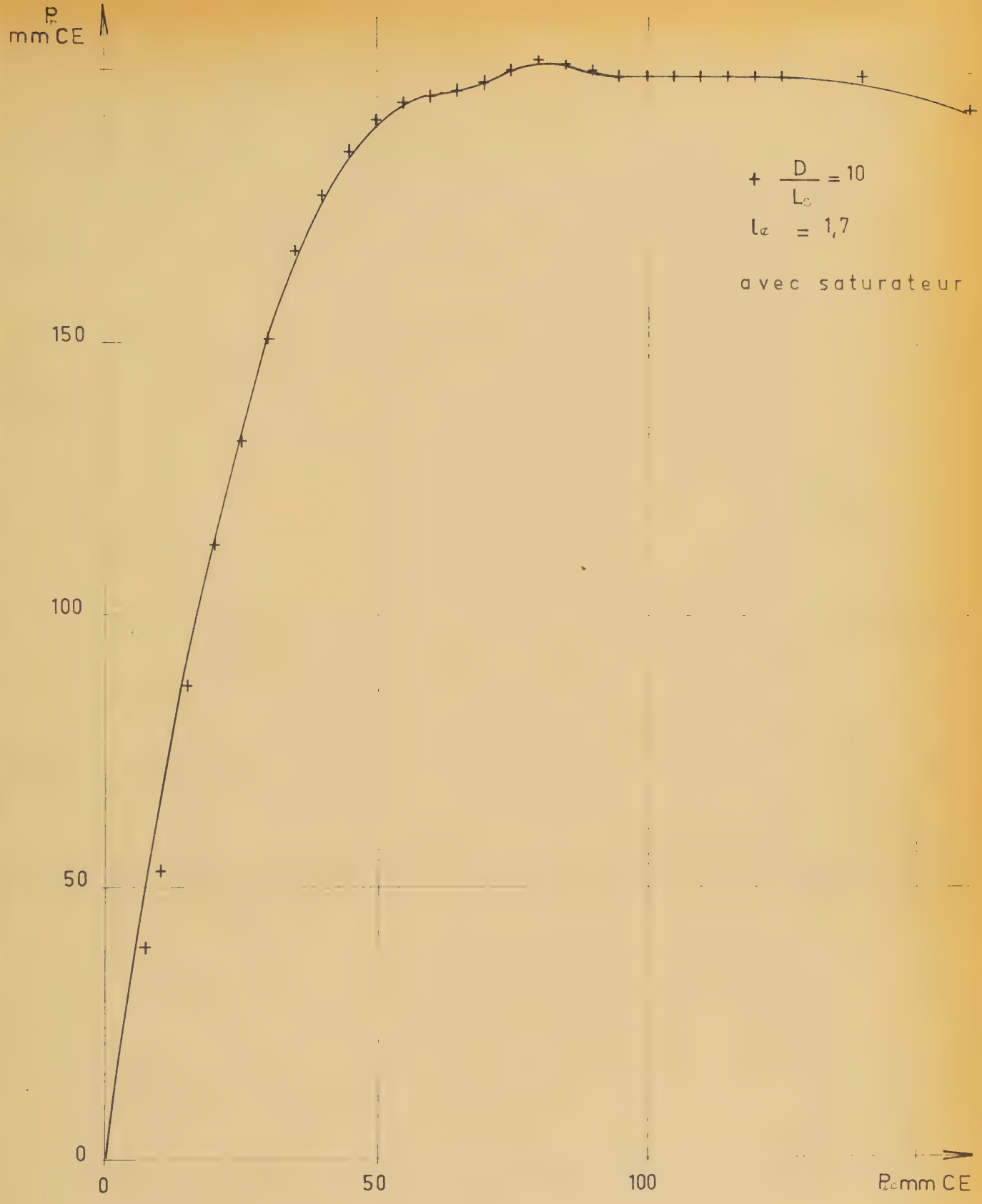


FIGURE _ 106

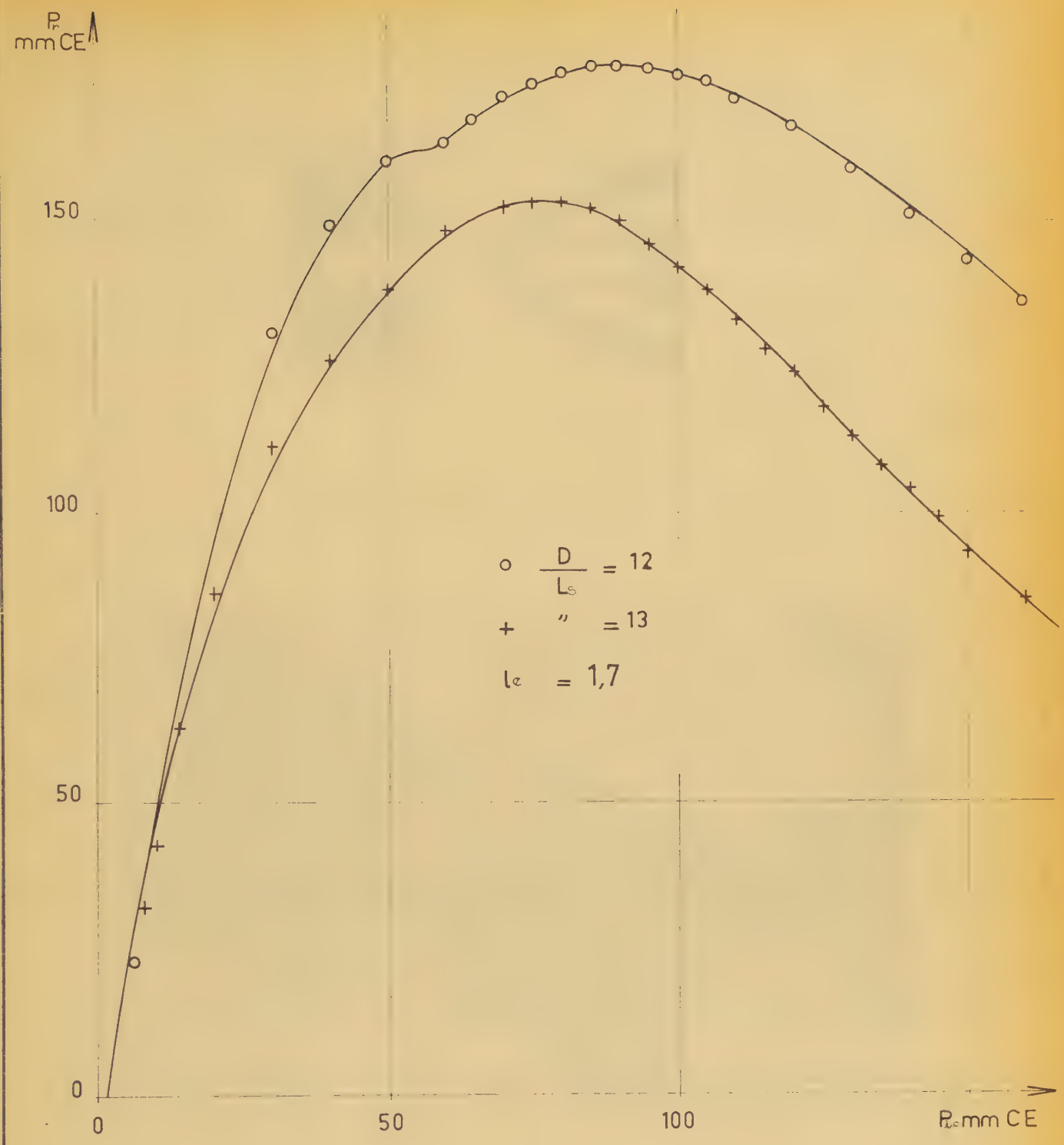
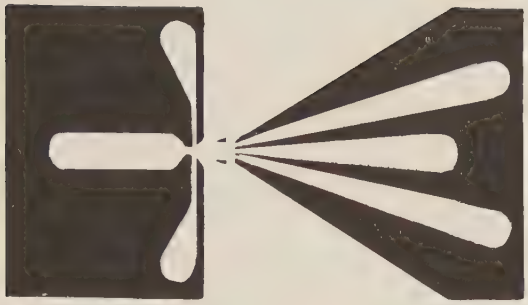


FIGURE_ 107



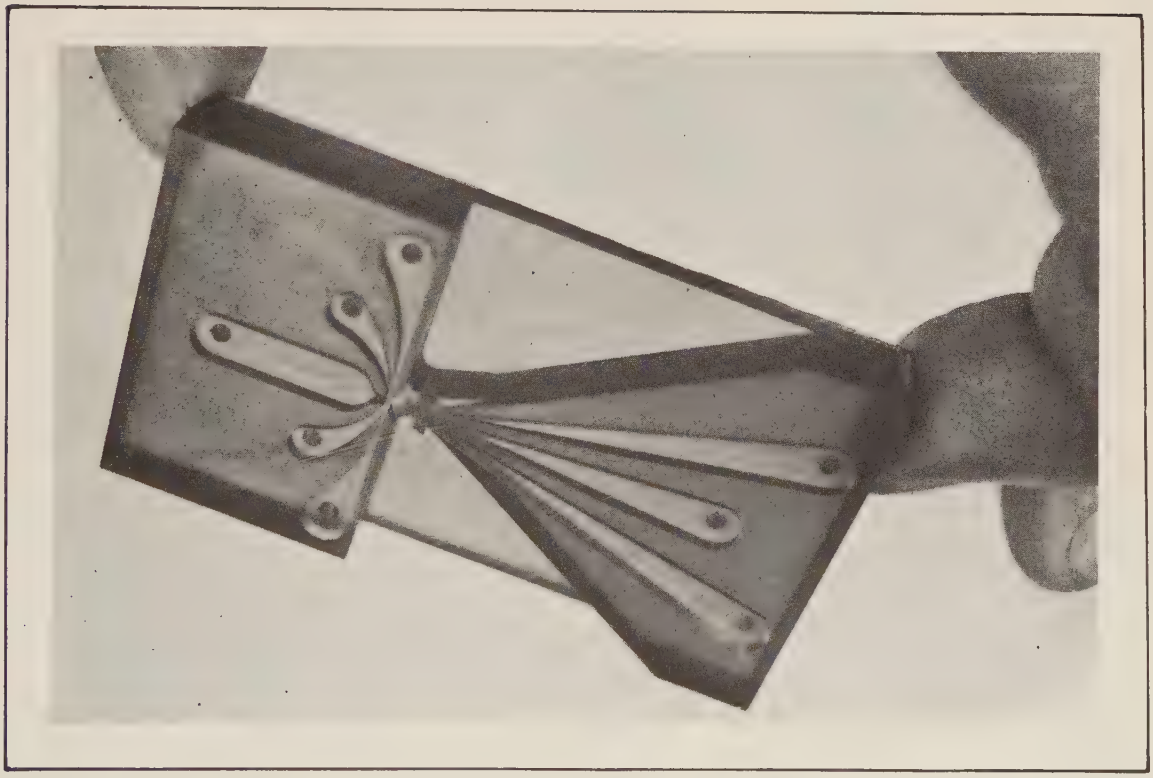


FIGURE _108

N° ordre 392.

Autorisation de soutenance
accordée.
TOULOUSE, le 8 AVR. 1970

Le Président du Conseil Transitoire,

F. MATHIS

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE